

デルタ関数の新しい教え方

山根^{ひでし}英司

関^{かん}西^{せい}学院大学

2026 年 8 月 7 日 (金)

日本数学教育学会 全国算数・数学教育研究 (東京) 大会

以下の 2 つの著書に基づく：

- 手を動かしてまなぶフーリエ解析・ラプラス変換，裳華房
- 手を動かしてまなぶ偏微分方程式，裳華房

1. デルタ関数

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \text{ で「定義」する.}$$

デルタ関数は通常関数ではない．超関数の一例．

通常（連続ならば十分）関数 $\varphi(x)$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0),$$

$$(\varphi * \delta)(x) = (\delta * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \delta(x - y) dy = \varphi(x) \text{ (再生性)}$$

物理や応用数学の本はこういう感じで書いている．大変便利．
ちゃんとした定義にはなっておらず，上の式の「証明」も怪しい．
ごまかしのない議論をしたい．

1. デルタ関数

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \text{ で「定義」する.}$$

デルタ関数は通常関数ではない．超関数の一例．

通常（連続ならば十分）関数 $\varphi(x)$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0),$$

$$(\varphi * \delta)(x) = (\delta * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \delta(x - y) dy = \varphi(x) \text{ (再生性)}$$

物理や応用数学の本はこういう感じで書いている．大変便利．
ちゃんとした定義にはなっておらず，上の式の「証明」も怪しい．
ごまかしのない議論をしたい．

1. デルタ関数

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \text{ で「定義」する.}$$

デルタ関数は通常関数ではない．超関数の一例．

通常（連続ならば十分）関数 $\varphi(x)$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0),$$

$$(\varphi * \delta)(x) = (\delta * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \delta(x - y) dy = \varphi(x) \text{ (再生性)}$$

物理や応用数学の本はこういう感じで書いている．大変便利．
ちゃんとした定義にはなっておらず，上の式の「証明」も怪しい．
ごまかしのない議論をしたい．

2. 熱方程式の初期値問題

$u_t = u_{xx}$, $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = \delta(x)$ を解く .

フーリエ変換 $\frac{d}{dt} \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$, $\hat{u}(0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. (簡単な ODE)

解は $\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t\xi^2)$.

逆変換して $u(t, x) = g_t(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$.

任意の初期値 $\varphi(x)$ に対する解は $u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x-y)\varphi(y) dy$.

デルタ関数を導入すると議論の見通しが良いが、厳密性が怪しい。
ごまかしのない、しかも初等的に理解できる説明が欲しい。

(L. Schwartz の超関数論そのままでは難しいので、普通の学生向けにアレンジ.)

2. 熱方程式の初期値問題

$u_t = u_{xx}$, $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = \delta(x)$ を解く .

フーリエ変換 $\frac{d}{dt} \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$, $\hat{u}(0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. (簡単な ODE)

解は $\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t\xi^2)$.

逆変換して $u(t, x) = g_t(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$.

任意の初期値 $\varphi(x)$ に対する解は $u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x-y)\varphi(y) dy$.

デルタ関数を導入すると議論の見通しが良いが、厳密性が怪しい。
ごまかしのない、しかも初等的に理解できる説明が欲しい。

(L. Schwartz の超関数論そのままでは難しいので、普通の学生向けにアレンジ.)

2. 熱方程式の初期値問題

$u_t = u_{xx}$, $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = \delta(x)$ を解く .

フーリエ変換 $\frac{d}{dt} \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$, $\hat{u}(0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. (簡単な ODE)

解は $\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t\xi^2)$.

逆変換して $u(t, x) = g_t(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$.

任意の初期値 $\varphi(x)$ に対する解は $u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x-y)\varphi(y) dy$.

デルタ関数を導入すると議論の見通しが良いが、厳密性が怪しい。
ごまかしのない、しかも初等的に理解できる説明が欲しい。

(L. Schwartz の超関数論そのままでは難しいので、普通の学生向けにアレンジ.)

2. 熱方程式の初期値問題

$u_t = u_{xx}$, $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = \delta(x)$ を解く .

フーリエ変換 $\frac{d}{dt} \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$, $\hat{u}(0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. (簡単な ODE)

解は $\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t\xi^2)$.

逆変換して $u(t, x) = g_t(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$.

任意の初期値 $\varphi(x)$ に対する解は $u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x-y)\varphi(y) dy$.

デルタ関数を導入すると議論の見通しが良いが, 厳密性が怪しい.
ごまかしのない, しかも初等的に理解できる説明が欲しい.

(L. Schwartz の超関数論そのままでは難しいので, 普通の学生向けにアレンジ.)

3. 略記法としてのデルタ関数 1 : 極限

$$g_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \text{ とおく (熱方程式の解) .}$$

$\mathbb{R}$ 上の任意の有界連続関数 $\varphi(x)$ について

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0) \quad (\text{微分積分の範疇のきちんとした式})$$

である . このことを

$$\lim_{t \rightarrow +0} g_t(x) = \delta(x) \quad (\text{上の式の略記})$$

と略記する .

デルタ関数なるものの実体があるとは主張しない .

略記法にすぎない .

きちんとした式を短くて印象的な形で書いた .

3. 略記法としてのデルタ関数 1 : 極限

$$g_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \text{ とおく (熱方程式の解) .}$$

$\mathbb{R}$ 上の任意の有界連続関数 $\varphi(x)$ について

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0) \quad (\text{微分積分の範疇のきちんとした式})$$

である . このことを

$$\lim_{t \rightarrow +0} g_t(x) = \delta(x) \quad (\text{上の式の略記})$$

と略記する .

デルタ関数なるものの実体があるとは主張しない .

略記法にすぎない .

きちんとした式を短くて印象的な形で書いた .

4. フーリエ解析の基礎付け

フーリエ解析の主結果

- フーリエ変換して逆変換したら元の関数に一致
- 関数からフーリエ級数を求め、フーリエ級数を作ると、その和は元の関数に一致

どちらも元の関数に一致する話（再生性）であり、

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} d_t(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$$

$$\text{または } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$$

のタイプの式（前ページの青い式と同じタイプ！）がポイント。

「これはデルタ関数の話だ」（ $d_t \rightarrow \delta$ または $f_n \rightarrow \delta$ ）とはっきり言ってしまうと印象的な説明になる。

そうしないと、テクニカルで謎めいた式に見えてしまう。

4. フーリエ解析の基礎付け

フーリエ解析の主結果

- フーリエ変換して逆変換したら元の関数に一致
- 関数からフーリエ級数を求め、フーリエ級数を作ると、その和は元の関数に一致

どちらも元の関数に一致する話（再生性）であり、

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} d_t(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$$

$$\text{または } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$$

のタイプの式（前ページの青い式と同じタイプ！）がポイント。

「これはデルタ関数の話だ」（ $d_t \rightarrow \delta$ または $f_n \rightarrow \delta$ ）とはっきり言ってしまうと印象的な説明になる。

そうしないと、テクニカルで謎めいた式に見えてしまう。

4. フーリエ解析の基礎付け

フーリエ解析の主結果

- フーリエ変換して逆変換したら元の関数に一致
- 関数からフーリエ級数を求め、フーリエ級数を作ると、その和は元の関数に一致

どちらも元の関数に一致する話（再生性）であり、

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} d_t(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$$

$$\text{または } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$$

のタイプの式（前ページの青い式と同じタイプ！）がポイント。

「これはデルタ関数の話だ」（ $d_t \rightarrow \delta$ または $f_n \rightarrow \delta$ ）とはっきり言ってしまうと印象的な説明になる。

そうしないと、テクニカルで謎めいた式に見えてしまう。

5. 基本解

$P(X)$: 多項式

任意のコンパクト台連続関数 $\varphi(x)$ について,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(E*\varphi)(x) = P\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{-\infty}^{\infty} E(x-y)\varphi(y)dy = \varphi(x)$$

が成り立つとき, $(*) P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) = \delta(x)$ と略記する.

ただの略記法であり, デルタ関数の実体があるとは主張しない.

$E(x)$ を $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ の**基本解**という.

形式的には, **赤い式** $(*)$ から **青い式**が出る.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{-\infty}^{\infty} E(x-y)\varphi(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x-y)\varphi(y)dy \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\varphi(y)dy = \varphi(x) \end{aligned}$$

5. 基本解

$P(X)$: 多項式

任意のコンパクト台連続関数 $\varphi(x)$ について,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(E*\varphi)(x) = P\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{-\infty}^{\infty} E(x-y)\varphi(y)dy = \varphi(x)$$

が成り立つとき, $(*) P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) = \delta(x)$ と略記する.

ただの略記法であり, デルタ関数の実体があるとは主張しない.

$E(x)$ を $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ の**基本解**という.

形式的には, **赤い式** $(*)$ から**青い式**が出る.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{-\infty}^{\infty} E(x-y)\varphi(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x-y)\varphi(y)dy \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\varphi(y)dy = \varphi(x) \end{aligned}$$

6. 例

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(E * \varphi)(x) = P\left(\frac{d}{dx}\right) \int_{-\infty}^{\infty} E(x-y)\varphi(y) dy = \varphi(x)$$

のとき $P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) = \delta(x)$ と略記． $E(x)$ を $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ の**基本解**という．

- ヘビサイド関数は $\frac{d}{dx}$ の基本解． $\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x)$
- $-\frac{1}{2}\exp(-|x|)$ は $\frac{d^2}{dx^2} - 1$ の基本解
- [3次元版] $\frac{-1}{4\pi|\mathbf{x}|}$ は 3次元ラプラシアンの基本解

本格的な本でも目的は上の青い式（の高次元版）．略記法の立場でも何も失っていない．