微分と積分の順序交換とその応用

ひでし　かんせい
山根英司 (関西学院大)

第 106 回全国算数・数学教育研究（大阪）大会
2024 年 8 月 2 日（金曜日）

このスライドは私のウェブサイトに置きます

1. 微分と積分の順序交換 (積分記号下の微分)

リーマン積分の用語だけで次のステイトメントが書ける．(ルベーグ積分の定理の特別な場合．) ブラックボックスとして認めて使えばよい．

J は開区間とする．I はどんな区間でもよい．
$(t,a) \in I \times J$ の関数 $f(t,a)$ について

(i) a を固定するとき，$f(t,a)$ は可積分,

(ii) $f(t,a)$ は a について $\mathcal{C}^1$ 級,

(iii) $\left|\dfrac{\partial}{\partial a} f(t,a)\right| \leq g(t)$ となる可積分関数 $g(t)$ が存在する

と仮定すると，$\displaystyle\int_I f(t,a)\,dt$ は a について微分可能で

$$\frac{d}{da}\int_I f(t,a)\,dt = \int_I \frac{\partial}{\partial a} f(t,a)\,dt.$$

2. 例

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (a > b > 0) \quad (*)$$

が留数解析で分かる.
両辺を a で微分して微分と積分の順序を交換すると

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \frac{dt}{a + b\sin t} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\sin t} = -\frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}},$$

ゆえに

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\sin t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

留数解析で求めると 2 位の極が出てきて面倒.

注: 実は $(*)$ も微分と積分の順序交換で分かる (留数解析不要).
(『手を動かしてまなぶフーリエ解析・ラプラス変換』サポートページにある詳細解答の最終ページ).

3. ラプラス変換とパラメータに関する微分法則

$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ において f がパラメータを持つ場合を考える．微分と積分の順序交換より

Theorem (パラメータに関する微分法則)

J は開区間とする．$f(t,a), f_a(t,a)$ $(t \geq 0, a \in J)$ がともに指数位数をもつならば

$$\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{L}[f(t,a)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial a} f(t,a)\right](s)$$

ラプラス変換の本には普通載っていないが，便利なので大いに使うことを勧める

4. 像の微分法則

像の微分法則も微分と積分の順序交換で示される (a ではなく s で微分).

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[tf(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} t f(t)\,dt \\
&= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{-st} f(t)\right\} dt \\
&= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty \left\{e^{-st} f(t)\right\} dt \\
&= -\frac{d}{ds}F(s)
\end{aligned}
$$

パラメータ a で微分する場合と独立変数 s で微分する場合を区別する．像の微分法則はラプラス変換の本に必ず載っている．a で微分する場合は普通載っていない．

5. $t^n e^{at}$ のラプラス変換

まず $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$ である．a で微分して，パラメータに関する微分法則より

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial a} e^{at}\right](s) = \frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{s-a}.$$

ゆえに

$$\mathcal{L}\left[te^{at}\right](s) = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

繰り返して，

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

同じ式は像の微分法則でも導ける．次の例はそうでない．

6. $(s^2+b^2)^{-2}$ のラプラス逆変換

$\mathcal{L}\left[\frac{1}{b}\sin bt\right](s)=\dfrac{1}{s^2+b^2}$ である．b で微分してパラメータに関する微分法則を用い，$-2b$ で割ると

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2b^3}\sin bt-bt\cos bt\right](s)=\frac{1}{(s^2+b^2)^2}.$$

すなわち，$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+b^2)^2}\right](t)=\dfrac{1}{2b^3}\sin bt-bt\cos bt.$

これは像の微分法則では出来ない．$\dfrac{1}{s^2+b^2}$ を s で微分すると分母はよくても分子に s が出てきて困る．また，

$$\int\frac{1}{(s^2+b^2)^2}\,ds=\frac{b}{2s^4+2b^2s^2}+\frac{\arctan\left(\frac{b}{s}\right)}{2s^3}$$

を使うのも現実的でない．

7. $\dfrac{1}{(s^2+b^2)^n}$ (分子 1) のラプラス逆変換

$\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{b}\sin bt\right](s)=\dfrac{1}{s^2+b^2}$ である．b で微分してパラメータに関する微分法則を用い，$-2b$ で割ると

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2b^3}\sin bt-bt\cos bt\right](s)=\frac{1}{(s^2+b^2)^2}.$$

もう一度 b で微分してパラメータに関する微分法則を用い，$-4b$ で割れば $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+b^2)^3}\right](t)$ が求められる．

同様に繰り返せば $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+b^2)^n}\right](t)$ が順に求められる．

8. $\dfrac{s}{(s^2+b^2)^n}$ (分子 s) のラプラス逆変換

$\mathcal{L}\left[\cos bt\right](s) = \dfrac{s}{s^2+b^2}$ (分子にもともと s がある).

b で微分してパラメータに関する微分法則を用いると

$$\mathcal{L}\left[-t\sin bt\right](s) = \frac{-2bs}{(s^2+b^2)^2}.$$

すなわち，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+b^2)^2}\right](t) = \frac{t}{2b}\sin bt.$$

b による微分を繰り返せば $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+b^2)^n}\right](t)$ を求められる.

分母が 2 乗ならば $\mathcal{L}[\sin bt](s) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$ と像の微分法則から導ける (分子 s なし→微分したら分子 s あり).
分母が n 乗の場合はどうか？ s で微分するたびに分子はどんどん複雑になって手に負えない.