大学入試問題 14 の曲線 C : $r = ke^{a\theta}$ $(k, a$ は定数で $k > 0)$ を対数螺旋 (らせん) または等角螺旋と呼びます. 指数関数で表されるので対数螺旋と呼ぶのは当然として, 等角螺旋と呼ぶのは何故でしょう.

$$x(\theta) = ke^{a\theta}\cos\theta, \quad y(\theta) = ke^{a\theta}\sin\theta$$

と置くと C 上の点 P は xy 座標で $(x(\theta), y(\theta))$ と表されます. P における C の接線と線分 OP とが成す角は θ によりません. この事実が等角螺旋という名前の由来です. 証明しましょう.

$$\frac{dx}{d\theta} = k(ae^{a\theta}\cos\theta - e^{a\theta}\sin\theta) = ke^{a\theta}(a\cos\theta - \sin\theta)$$
$$\frac{dy}{d\theta} = k(ae^{a\theta}\sin\theta + e^{a\theta}\cos\theta) = ke^{a\theta}(a\sin\theta + \cos\theta)$$

そこで $(dx/d\theta, dy/d\theta)$ と同じ向きのベクトル

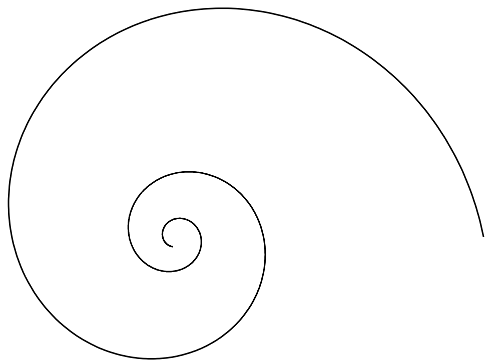
$$\vec{u} = (a\cos\theta - \sin\theta, a\sin\theta + \cos\theta)$$

と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と同じ向きのベクトル $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ を考えると

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2+1}, \quad |\vec{v}| = 1, \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = a$$

なので $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は θ によらず常に $\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ の角度を成します.

下図は $a = -1/5$ の場合です.



ある種の鳥は獲物を襲うときに等角螺旋に沿って飛ぶそうです．獲物が斜め前方の一定の方向に見えるように飛べばいいので狙いがつけやすいのです.

獲物を正面に見据えて直線に沿って飛ばないのは何故でしょうか. それは，鳥の目は頭の横についていて, 正面はよく見えないからです. 首をかしげれば正面が見られるけれども，それだと気流が乱れて飛行速度が落ちてしまうのです．実際，風洞実験を行なった人がいるそうです (以上の鳥の話は Mario Livio, "The Golden Ratio" によります).

17 世紀の数学者ヤコブ・ベルヌーイは等角螺旋のもつ様々な美しい性質に感動し, 自分の墓石には等角螺旋を刻んで欲しいという遺言を残しました. しかし石屋の手違いまたは手抜きのために彼の墓石にはアルキメデス螺旋 ($r = a\theta$) が刻まれてしまったのです．この他，等角螺旋に関する数学史上の逸話についてはE. マオールの『不思議な数 e の物語』(岩波書店) をご覧下さい.

以下は大学生 (2, 3 年生) 向けです.

平面の力学系 (常微分方程式系)

$$\frac{dx}{dt} = ax - by, \frac{dy}{dt} = bx + ay \quad (a, b \text{ は定数で } ab \neq 0)$$

の積分曲線は等角螺旋になります．詳細はアーノルド『常微分方程式』(現代数学社), ポントリャーギン『常微分方程式』(共立出版) などをご覧下さい. 非常に手に入りにくいと思いますが, 斎藤利弥『力学系以前』(日本評論社) という名著があります. 図書館で探してください.