$$\cosh\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}, \quad \sinh\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$$

と定義して，双曲線関数といいます．cosh をハイパボリックコサイン, sinh をハイパボリックサインと読みます．

$\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$ が容易に示されます．すなわち点 $(\cosh\varphi, \sinh\varphi)$ が曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の上にあります．この曲線は双曲線なのでこれら二つの関数を双曲線関数と呼びます．

$\cosh\varphi$ は偶関数なので $\cos\varphi$ に似ており，$\sinh\varphi$ は奇関数なので $\sin\varphi$ に似ています．また，オイラーの公式を知っている人のためには次のような説明も出来ます．

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + \sin(-\varphi) = \cos\varphi - \sin\varphi$$

なので

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

となります．$\cosh\varphi, \sinh\varphi$ の定義式はこれらの式に似ています．

$$(\cosh\varphi)' = \sinh\varphi, \quad (\sinh\varphi)' = \cosh\varphi$$

が容易に示されます．符号に注意してください．三角関数の場合とは少し違います．

常に $\cosh\varphi > 0$ なので $\sinh\varphi$ は単調増加です．

$$\lim_{\varphi\to-\infty} \sinh\varphi = -\infty, \lim_{\varphi\to\infty} \sinh\varphi = \infty$$

なので φ が実数全体を動くとき $\sinh\varphi$ も実数全体を動きます．実数全体の集合を $\mathbf{R}$ で表すと，sinh は $\mathbf{R}$ からそれ自身への全単射 (1 対 1 の上への写像) です．したがって 逆関数 $\sinh^{-1}$ が $\mathbf{R}$ からそれ自身への関数 (全単射) として定義されます．記号がまぎらわしいですが，-1 乗としっかり区別してください*．$\sinh^{-1}$ を具体的な式で表してみましょう．文字は x, y を使います．

$$y = \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

とおきます．さらに $t = e^x > 0$ とおけば $2y = t - \dfrac{1}{t}$ なので $t = y \pm \sqrt{y^2+1}$. ところが $t > 0$ なので $t = y + \sqrt{y^2+1}$ となります．$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ より $\sinh^{-1} y = x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$．すなわち

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \tag{1}$$

*2 乗を $\sinh^2\varphi$ と表すのに, $\sinh^{-1}$ は -1 乗ではなく，逆関数を表します．一貫性がないけれど，昔からの習慣なので仕方ありません．-1 乗は $(\sinh\varphi)^{-1}$ と書くしかありません．

さてこれを積分の計算に応用しましょう．$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ を求めましょう．$x = \sinh t$ (つまり $t = \sinh^{-1} x$) とおきます．$1 + x^2 = \cosh^2 t$ なので $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$ となります．$dx = \cosh t\, dt$ なので

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\underline{dx} = \int \frac{1}{\cosh t}\cdot\underline{\cosh t\, dt} = \int dt = t + C = \sinh^{-1} x + C \qquad (2)$$

これは $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$ に似ています．$\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数で『高校生のための逆引き微分積分』では arcsin と書きました．

(1) と (2) を合わせれば

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big) + C \qquad (3)$$

(2) よりも (3) の表記が好まれますが，(3) を忘れたら (2) を経由して (3) を導けばいいと思います．この導出法は忘れにくいでしょう．

一般には x と $\sqrt{1+x^2}$ の分数式は $t = x + \sqrt{x^2+1}$ と置換するのが定石です．大学 1 年レベルの微分積分の教科書をご覧下さい．

垂れ下がった紐のかたちは放物線に似ていますが，実はそうではありません．この曲線は

$$y = \frac{1}{a}\cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$$

で表され (a は物理的条件で決まるパラメータ)，懸垂線 (カテナリ) と呼ばれています．紐は重力のポテンシャル・エネルギーが最小になる形をとります．詳細は変分法の本をご覧下さい．カテナリの図を載せておきます．