例題 2 の補足をします．ほんの少しだけ高校の範囲を逸脱します．

$k \geq 1$ につき，関数 $f(x)$ が $k$ 回微分可能で $k$ 階導関数が連続ならば, $f(x)$ は $C^k$ 級関数だといいます．連続関数のことを $C^0$ 級関数といいます．

何度でも微分可能な関数のことを $C^\infty$ 級関数といいます ($f^{(k+1)}(x)$ が存在するなら $f^{(k)}(x)$ は連続なので, $C^\infty$ 級関数の定義では"各階導関数が連続"ということをいちいち言わなくてもいいのです)．$\sin x, \cos x, e^x$ は $C^\infty$ 級です．$\log x$ と $\sqrt{x}$ は $x > 0$ で $C^\infty$ 級です．分数関数は 分母 $\neq 0$ となるところで $C^\infty$ 級です．

こんな例ばかり見ていると，中途半端な $C^k$ 級の関数なんて無いじゃないかと思ってしまいます．それが実はそういう中途半端な関数は確かにあるのです．以下で例を示します．「連続」「微分可能」の定義は高校の教科書に載っているので, よく理解してから以下の説明を読んで下さい．

例題 2 の $f_1(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ は $x \neq 0$ で定義されています．$x = 0$ での値を $f_1(0) = 0$ と定めると，$f_1(x)$ は実数全体で定義された関数となります．このとき $f_1(x)$ は実数全体で $C^0$ 級です．実際, $x \neq 0$ で連続なのは明らかであり, また，例題 2 で示したとおり $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0$ なので

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = f_1(0)$$

が成り立ちます．つまり $x = 0$ でも連続です．

$f_1(x)$ は $x \neq 0$ では明らかに $C^\infty$ 級ですが, $x = 0$ では微分不可能です．なぜなら

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h - 0} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h}$$

が存在しないからです (もし存在すればそれが $f_0'(0)$ になるのですが)．

**まとめ:** $f_1(x)$ は実数全体で $C^0$ 級ですが, $C^1$ 級ではありません．

次に $f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とおきます．$f_2(x) = xf_1(x)$ ですから $f_2(x)$ が実数全体で $C^0$ 級なのは明らかです．さらに $x \neq 0$ では

$$f_2'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

となって，$x \neq 0$ では $C^1$ 級です．$\lim_{x\to 0} f_2'(x)$ は存在しません．したがって $f_2'(x)$ は実数全体で連続ではありません．つまり $f_2(x)$ は実数全体では $C^1$ 級でないことが分かります．

ところで $\lim_{h\to 0}\dfrac{f_2(h)-f_2(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} h\sin\dfrac{1}{h} = 0$ ですから $f_2'(0) = 0$ となります．特に $f_2(x)$ は $x = 0$ で微分可能です．したがって $f_2(x)$ は実数全体で微分可能です．

> $f_2(x)$ は実数全体で微分可能 (特に $C^0$ 級) であり, $x \neq 0$ では $C^1$ 級です．しかし，実数全体で $C^1$ 級というわけではありません．

次に $f_3(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とおきます．$f_3(x) = xf_2(x)$ なので $f_3(x)$ は少なくとも $f_2(x)$ と同程度には滑らかです．$x \neq 0$ において

$$f_3'(x) = 3x^2\sin\frac{1}{x} + x^3 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$$

は連続です．さらに $\lim_{x\to 0} f_3'(x) = 0$ が例題 2 の方法で分かります．また，

$$f_3'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_2(h)-f_2(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} h^2\sin\frac{1}{h} = 0$$

が成り立ちます．よって $f_3'(0) = \lim_{x\to 0} f_3'(x)$ です． つまり $f_3'(x)$ は $x = 0$ を含めて実数全体で連続です．結局 $f_3(x)$ は実数全体で $C^1$ 級です．

さらに $C^2$ 級かどうかを調べると

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_3'(h)-f_3'(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0}\left(3h\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{h}\right)$$

が存在しないので $f_3''(0)$ は存在しません．特に $f_3(x)$ は $C^2$ 級ではありません．

> $f_3(x)$ は実数全体で $C^1$ 級ですが $C^2$ 級ではありません．

あまり面白みはないのですが,

$$g_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は実数全体で $C^k$ 級です．$g'_k(x) = g_{k-1}(x)$ に気づけば証明は容易です.

次に

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は実数全体で $C^\infty$ 級です.

$x = 0$ だけが問題です．左側微分係数は

$$\varphi'_-(0) = \lim_{h \to -0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h - 0} = \lim_{h \to -0} \frac{0}{h} = 0$$

です．右側微分係数は $1/h = t$ とおくことにより

$$\begin{aligned} \varphi'_+(0) &= \lim_{h \to +0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h - 0} = \lim_{h \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} \\ &= \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0 \end{aligned}$$

となりますから両側の微分係数が一致して，$\varphi'(0) = 0$ となります.

$x < 0$ で $\varphi'(x) \equiv 0$ なのは明らかです．$x > 0$ で $\varphi'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ であり，さきほどと同様に $1/x = t$ とおけば

$$\lim_{x \to +0} \varphi'(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

となります．したがって $\lim\limits_{x \to 0} \varphi'(x) = \varphi'(0) (= 0)$ となって $\varphi'(x)$ が実数全体で連続であることが分かります．すなわち $\varphi(x)$ が実数全体で $C^1$ 級であることが分かりました.

同様の計算を続ければ, 任意の $k$ について $\varphi^{(k)}(x)$ が存在して連続であること, すなわち $\varphi(x)$ が $C^\infty$ 級であることが分かります.

この $\varphi(x)$ は進んだ数学ではたいへん重要なものです．1 の分解というものがあって，これなしでは現代の解析学も幾何学も成り立ちません．そして 1 の分解を構成するときに $\varphi(x)$ を使うのです.