π が無理数であることを証明します. 高校数学だけを前提に説明するので話が長くなります. 参考文献は杉浦光夫「解析入門 I」p.191.

ライプニッツの公式

積の微分法を一般化します. n が自然数のとき $f(x), g(x)$ の積 fg の n 階導関数は

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \cdots\cdots(*)_n$$

証明 $(*)_1$ は積の微分法です. $(*)_n$ が成り立つと仮定して $(*)_{n+1}$ を導きましょう. $(*)_n$ を仮定して両辺を微分すると

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left\{ f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} {}_nC_{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)} g^{(n-k+1)} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

上の計算 $(\sum_{k=1}^{n+1})$ がちょっと分かりにくいと思うので補足します.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{\ell=1}^{n+1} a_{\ell-1} \, (k = \ell - 1 \text{ と置きました}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \, (\ell = k \text{ と置きました. 最初のとは違う新しい } k \text{ です.})\end{aligned}$$

という訳で, 古い k と新しい k があるのが混乱しやすいところです.

①で $1 \leqq k \leqq n$ なら $f^{(k)} g^{(n-k+1)}$ の係数は次のようにまとめられます.

$${}_nC_{k-1} + {}_nC_k = {}_{n+1}C_k \qquad \cdots\cdots ②$$

この式は 2 項係数を階乗で表して示せますが, 組み合わせの場合の数として意味づけしても証明できます. すなわち, $n+1$ 人の候補者から k 人の合格者を選ぶとします. 候補者の A さんに注目すると, k 人の合格者を選ぶには

- A さんは合格. 残りの n 人の候補者から $k-1$ 人の合格者を選ぶ
- A さんは不合格. 残りの n 人の候補者から k 人の合格者を選ぶ

の両方が考えられます．これで②が出ます．

さて①で $f^{(0)}g^{(n+1)}, f^{(n+1)}g^{(0)}$ の係数はともに 1 で，$1 = {}_{n+1}C_0 = {}_{n+1}C_{n+1}$ と書き直すと，②より

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

これは $(*)_{n+1}$ です． ■

階乗は指数関数よりすごい

a が定数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

証明　a が正のときに証明すれば負の場合は直ちに従います．そこで以下では $a > 0$ とします．$0 < a < m$ となる自然数 m を一つ取ります．$j \geqq 2m$ のときは $0 < \dfrac{a}{j} \leqq \dfrac{a}{2m} < \dfrac{1}{2}$ なので

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{2m}}{(2m)!} \cdot \frac{a}{2m+1} \cdot \frac{a}{2m+2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} < \frac{a^{2m}}{(2m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2m}$$

m は固定されているので $n \to \infty$ のとき $\dfrac{a^{2m}}{(2m)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2m} \to 0$ となります．

はさみうちにより $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ が従います． ■

π は無理数である．

証明　背理法で証明します．もし有理数だとすると $\pi = \dfrac{p}{q}$ (p, q は自然数) と表せます．このとき

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n$$

とおきます．n は任意の自然数です．当面 n は固定しておいて，最後に動かします．

以下 3 つのステップで議論を進めます．

Step 1 自然数 k が $0 \leqq k \leqq 2n$ をみたすとき $f^{(k)}(0), f^{(k)}(\pi)$ は全て整数.

$f(x)$ は $2n$ 次多項式なので, $k \geqq 2n+1$ なら $f^k(x) \equiv 0$ です. $k < n$ ならばライプニッツの公式より $f^{(k)}(x)$ は x でも $p-qx$ でも割り切れるので $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi) = 0$ です.

$n \leqq k \leqq 2n$ ならば

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(0) &= \frac{1}{n!}{}_kC_n(x^n)^{(n)}\{(p-qx)^n\}^{(k-n)}\Big|_{x=0} \\
&\qquad (\text{他の項は微分したとき, または } x=0 \text{ を代入したときに消える}) \\
&= {}_kC_n\{(p-qx)^n\}^{(k-n)}\Big|_{x=0} \\
&= {}_kC_n(-q)^{k-n}n(n-1)\cdots(2n-k+1)p^{2n-k} \\
f^{(k)}(\pi) &= \frac{1}{n!}{}_kC_n(x^n)^{(k-n)}\{(p-qx)^n\}^{(n)}\Big|_{x=\pi} = (-q)^n{}_kC_n(x^n)^{(k-n)}\Big|_{x=\pi} \\
&= (-q)^n{}_kC_n n(n-1)\cdots(2n-k+1)\pi^{2n-k}
\end{aligned}$$

となってどちらも整数です. $n \geqq 2n-k$ なので $\pi = p/q$ という仮定より $q^n\pi^{2n-k}$ が整数となることを使いました.

Step 2 $I = \int_0^\pi f(x)\sin x dx$ とおくと I は整数

一般に 2 回部分積分することにより

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi g(x)\sin x dx &= \int_0^\pi g(x)(-\cos x)' dx \\
&= [g(x)(-\cos x)]_0^\pi + \int_0^\pi g'(x)\cos x dx \\
&= g(\pi) + g(0) + \int_0^\pi g'(x)(\sin x)' dx \\
&= g(\pi) + g(0) - \int_0^\pi g''(x)\sin x dx
\end{aligned}$$

が成り立つので $g(x) = f^{(2k)}(x)$ とすると

$$\int_0^\pi f^{(2k)}(x)\sin x dx = f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0) - \int_0^\pi f^{(2k+2)}(x)\sin x dx$$

両辺に $(-1)^k$ を掛けて

$$A_k = (-1)^k \int_0^\pi f^{(2k)}(x) \sin x dx, \quad B_k = (-1)^k \{f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)\}$$

とおくと $B_k = A_k - A_{k+1}$ となりますから

$$\sum_{k=0}^n B_k = A_0 - A_{n+1}$$

$A_0 = I$ です．また， f を $n+1$ 回微分すると恒等的に 0 ですから $A_{n+1} = 0$ となって

$$I = \sum_{k=0}^n (-1)^k \{f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)\}$$

Step 1 の結果より Step 2 の証明が終わります.

Step 3　π は無理数

　$0 \leqq x \leqq \pi$ において $0 \leqq \sin x \leqq 1$, $0 \leqq (p - qx)^n \leqq p^n$ なので

$$0 < I \leqq \int_0^\pi \frac{p^n x^n}{n!} dx = \frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!}$$

が成り立ちます. 階乗は指数関数より速く増大するので, n が十分大きいとき $0 < I < 1$ が成り立ちます. これは I が整数であること (Step 2) に矛盾します. この矛盾は π が有理数だという仮定から生じたものです. したがって π は無理数です. ■

　π の近似値の求め方を『高校生のための逆引き微分積分』第 10 章, e が無理数であることの証明を同書 p. 63 に書きました.