問題 5.4 の 5 の解答

(1) $S = 2\pi \int_0^{2\pi} |\sin x|\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = 4\pi \int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

$(\cos x = t$ とおくと $-\sin x dx = dt$ なので$)$

$= 4\pi \int_{x=0}^{x=\pi} -\sqrt{1+\cos^2 x}\,\underline{(-\sin x dx)}$

$= 4\pi \int_{t=1}^{t=-1} -\sqrt{1+t^2}\,\underline{dt} = 2\pi\Big[t\sqrt{t^2+1} + \log\Big(t+\sqrt{t^2+1}\Big)\Big]_{-1}^{1}$

$= 4\pi\big(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\big)$ (不定積分は p.60, 63 参照)

(2) $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a\cosh\dfrac{x}{a}\ (-a \le x \le a)$

双曲線関数 $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ (hyperbolic cosine), $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

について $(\cosh t)' = \sinh t,\quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \cdots (*)$ なので

$S = 2\pi \int_{-a}^{a} a\cosh\dfrac{x}{a}\sqrt{1+\sinh^2\dfrac{x}{a}}dx = 2\pi\int_{-a}^{a} a\cosh^2\dfrac{x}{a}dx$

$= 2\pi a \int_{-a}^{a} \dfrac{e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}}{4}dx = \dfrac{\pi a}{2}\left[\dfrac{a}{2}e^{2x/a} + 2x - \dfrac{a}{2}e^{-2x/a}\right]_{-a}^{a}$

$= \dfrac{\pi a^2}{2}(e^2 - e^{-2} + 4)$ **注:** $x^2 - y^2 = 1$ は双曲線である．$(*)$ と比べよ．

(3) x, y 軸に関する対称性より第 1 象限の分だけ計算して 2 倍すればよい．

$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t\ (0 \le t \le \pi/2)$ が第 1 象限の分である．

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt} = -\tan t,\ \sqrt{1+(dy/dx)^2} = \dfrac{1}{\cos t},\ dx = -3a\cos^2 t\sin t dt$

$S = 4\pi\int_{x=0}^{x=a} y\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx$

$= 4\pi\int_{t=\pi/2}^{t=0} a\sin^3 t\cdot\dfrac{1}{\cos t}\cdot(-3a\cos^2 t\sin t dt)$

$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\,dt = 12\pi a^2\left[\dfrac{1}{5}\sin^5 t\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{12\pi a^2}{5}$

(4) $x^2 + (y-b)^2 = a^2\ (0 < a < b$ より円は回転軸と交わらない$)$

$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2},\ y' = \mp\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

円の上半分・下半分からできる面の面積の和を求める．

$S = 2\pi\int_{-a}^{a}\Big(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}} + a\Big)dx + 2\pi\int_{-a}^{a}\Big(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}} - a\Big)dx$

$= 4\pi\int_{-a}^{a}\dfrac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = 4\pi\Big[ab\arcsin\dfrac{x}{a} + ax\Big]_{-a}^{a} = 4\pi^2 ab$