微積分学 II　問題 3.3　山根英司

問題 3.3 の 1．広義積分の簡単な例

(1) $x = 3$ をいったん避けてから極限

(2) $\sin x = t$ と置換すると $-\cos x dx = dt$, $t = 0$ を避ける

(3) 部分積分

(4) $x^2 = t$ と置換 すると $2xdx = dt$

(5) x の正負で分ける．$x = 0$ をいったん避けてから極限

(6) $x = 0$ をいったん避ける．不定積分のために部分積分か $x = e^t$

(7) 以降は略

問題 3.3 の 3．ガンマ関数

p.70 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ $(s > 0)$

(1) $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx = \int_0^\infty (-e^{-x})' x^s dx$ を部分積分

(2) まず $\Gamma(1) = 1$ を示す．(2) の漸化式から一般項 $\Gamma(n)$ が分かる．

問題 3.3 の 4．ベータ関数

$x \to +0$ で x^{p-1} が発散するかも知れないが, $(1-x)^{q-1}$ は有限な値 1 に収束するから無害である．

逆に $x = 1$ の付近では x^{p-1} は無害で, $(1-x)^{q-1}$ が危険である．

そこで $x = 0$ の近くと $x = 1$ の近くで分けて考える．つまり $0 < x \leq 1/2$ と $1/2 \leq x < 1$ に分ける．

$0 < x \leq 1/2$ では $(1-x)^{q-1}$ は有界である．つまり $(0 <)(1-x)^{q-1} \leq C_0$ となる定数 C_0 がある．よって $0 < x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq C_0 x^{p-1}$ となって例 4 と定理 3.3.1 から $\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ は存在する．

$1/2 \leq x < 1$ では $0 < x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq C_1(1-x)^{q-1}$ となる定数 C_1 が存在するので，やはり例 4 と定理 3.3.1 から $\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ は存在する．

問題 3.3 の 5．ベータ関数

教科書のヒントにあるように $x = \sin^2\theta$ とおけば $dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$ となる．まずこの形を括り出しておいて残りをうまく調節すると

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \sin^a\theta \cos^b\theta d\theta \\
=&\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin^{a-1}\theta\cos^{b-1}\theta \cdot \underline{2\sin\theta\cos\theta d\theta} \\
=&\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1} x^{(a-1)/2}(1-x)^{(b-1)/2}\underline{dx}
\end{aligned}
$$