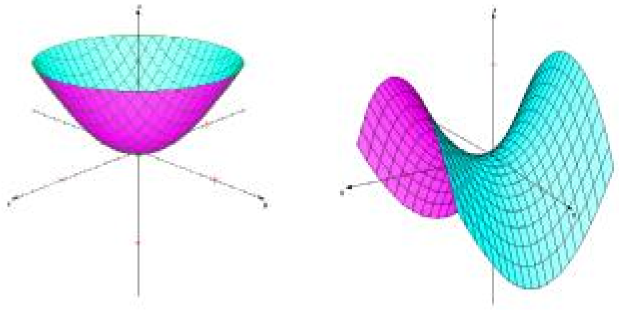
微積分学 I　4.3 節 2 変数関数の極値

定理 4.3.4 の典型的な例 $z = x^2 + y^2$(原点で極小) と $z = x^2 - y^2$(原点で極値をとらない) のグラフを下に示す．後者のグラフは馬の鞍に似ているので原点は鞍点 (あんてん) であるという．峠点という言い方もある．



線形代数で 2 次形式を習えばこのあたりの話がよく理解できるようになる．

上のグラフは Windows 用のフリーソフト Function View で作成した．このソフトは `http://hp.vector.co.jp/authors/VA017172` で入手できる．

定理 4.3.4 の大ざっぱな説明は次の通りである．簡単のため $a = b = 0$ としよう (平行移動しただけだから本質的な制限ではない)．

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ のときマクローリン展開 (定理 4.3.2 で $n = 3$ とする) の $j = 1$ の項は消える．$p = f_{xx}(0,0), q = f_{xy}(0,0), r = f_{yy}(0,0)$ とおく．$D = pr - q^2 > 0, p > 0$ としよう．

$$f(h,k) = f(0,0) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(ph^2 + 2qhk + rk^2\right)}_{\text{剰余項よりうんと大きい}} + \underbrace{\text{剰余項}}_{\text{小さい}}$$

である．$D > 0, p > 0$ としているので, 平方完成により

$$ph^2 + 2qhk + rk^2 = p\left(h + \frac{q}{p}k\right)^2 + \frac{D}{p}k^2 \geq 0$$

である．等号が成立するのは $h + \frac{q}{p}k = k = 0$ つまり $h = k = 0$ のときだけである．だいたいこれで $(h,k) \neq (0,0)$ なら $f(h,k) > f(0,0)$ となること，すなわち $f(x,y)$ が $x = y = 0$ で極小となることが分かる．もちろん剰余項が気になるが, これは 2 次の項に比べてうんと小さいので無害である (ということをきちんと説明するには教科書のように o を使って計算すればよい)．

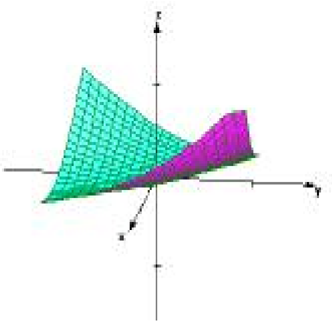
問題 4.3 の 7．解説

(1) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ は $2x+y=x+4y-4=0$ で $x=-4/7, y=8/7$. 定理 4.3.3 よりどこかで極値をとるとしたら $(-4/7,8/7)$ が唯一の候補．本当にここで極値をとるかどうか調べるには定理 4.3.4 を使う．
$f_{xx}(x,y)=2, f_{xy}(x,y)=1, f_{yy}(x,y)=4$ (本問ではたまたま 2 次導関数が定数関数になるが，いつでもそうなるわけではない),
$f_{xx}(-4/7,8/7)=2, f_{xy}(-4/7,8/7)=1, f_{yy}(-4/7,8/7)=4$ である．
$D=2\cdot 4-1^2=7>0$, $f_{xx}(-4/7,8/7)=2>0$ なので $(-4/7,8/7)$ で極小値 $f(-4/7,8/7)=-16/7$ をとる．

(2) $3x^2+2y-1=2x-2=0$ より $x=1, y=-1$. どこかで極値をとるとしたら $(1,-1)$ しかないのだが $f_{xx}(x,y)=6x, f_{xy}(x,y)=2, f_{yy}(x,y)=0$ なので $D=-4<0$ で $(1,-1)$ では極値をとらない．結局どこでも極値をとらない．

(3) $3x^2+2x+2y=3y^2+2x+2y=0$ より辺々引いて $x^2-y^2=0$. よって $y=\pm x$. 結局 $(x,y)=(0,0),(-4/3,-4/3)$.
$f_{xx}(x,y)=6x+2, f_{xy}(x,y)=2, f_{yy}(x,y)=6y+2$ である．

$(0,0)$ で $f_{xx}(x,y)=2, f_{xy}(x,y)=2, f_{yy}(x,y)=2$ だから $D=0$ で定理 4.3.4 だけでは極値をとるかどうか不明．そこで他の手を考える．$y=-x$ とすると $f(x,-x)\equiv 0$ だから極大でも極小でもない．



$(-4/3,-4/3)$ では極大値 $64/27$ をとることが定理 4.3.4 から分かる．

(4) $4x^3+4x-4y=2y-4x=0$ より $(x,y)=(0,0),(\pm 1,\pm 2)$(複号同順).

$f_{xx}(x,y)=12x^2+4, f_{xy}(x,y)=-4, f_{yy}(x,y)=2$ である．

$f_{xx}(0,0)=4, f_{xy}(0,0)=-4, f_{yy}(0,0)=2$ より $(0,0)$ では $D<0$ で極値をとらない．

$f_{xx}(\pm 1,\pm 2)=16>0, f_{xy}(\pm 1,\pm 2)=-4, f_{yy}(\pm 1,\pm 2)=2$ より $(\pm 1,\pm 2)$ では $D>0$ で極小値 0 をとる．

(5) $2x-y+2=-x+2y-1=0$ より $x=-1, y=0$. 極小値 6.