微積分学 I　ロピタルの定理 (問題 2.2 の 4.)

問題 2.2 の 4. 不定形の極限を求めるために分子・分母を微分しても，まだ不定形のままのことがある．そのときはさらに何度か繰り返し分子・分母を微分する．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3(\log x)^2\cdot(1/x)}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3(\log x)^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6\log x}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{\log x}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1/x}=1$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{-e^x}=-2$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}x}{x-x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1/\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x+x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x/(1-x^2)^{3/2}}{2\sin x+x\cos x}$

逆数が次のようになるので答えは $-1/3$

$\displaystyle\frac{2\sin x+x\cos x}{-x/(1-x^2)^{3/2}}=-2(1-x^2)^{3/2}\cdot\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{-1/(1-x^2)^{3/2}}\to -3$

(6) $f(x)=x^{1/x}$ とおき, $\displaystyle\log f(x)=\frac{\log x}{x}$ をロピタルで調べる.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0$

$\displaystyle\Rightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=e^0=1$

(7) $f(x)=x^{\frac{x}{1-x}}$ とおくと

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\log f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x+1}{-1}=-1$

$\displaystyle\Rightarrow\lim_{x\to 1}f(x)=e^{-1}=1/e$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x\log x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x+1}{-2x}=-1/2$

(9) $\displaystyle f(x)=\left(1+\frac{a}{x^2+x}\right)^{x^2}=\left(\frac{x^2+x+a}{x^2+x}\right)^{x^2}$ とおく.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+x+a)-\log(x^2+x)}{1/x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x+1}{x^2+x+a}-\dfrac{2x+1}{x^2+x}}{-2/x^3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)}{2}\frac{a}{(x^2+x)(x^2+x+a)}=a\Rightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=e^a$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a-b^x\log b}{1}=\log a-\log b$