微積分学 II　問題 5.2 の 1. と 2. と 3.　解答例　山根・八田

問 5.2 の 1.

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと $x^2 + y^2 = r^2$, $dxdy = rdrd\theta$ である．
以下の各問で D に対応する $r\theta$ 平面の領域を E と表す．

(1)　E : $a \le r \le 2a, 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{2a} r^{-2m+1}\, dr = I_1 \text{とおく}.$$

① $m \ne 1$ のとき　$I_1 = \dfrac{\pi}{1-m} a^{-2m+2}(2^{-2m+2} - 1)$

② $m = 1$ のとき　$I_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = 2\pi \log 2$

(2)　$E : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} dr$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

(3)　$E : -\pi/2 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le \cos\theta$ (例題 5.2.4 参照)

$$\iint_D x\, dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\cos\theta} r^2\, dr = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3}{8} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

2 倍角の公式を 2 回使って次数を下げた．例題 3.2.1 も参照．

問 5.2 の 2.

(1)　$x - y = u, x + y = v$ とおく．D は $E : 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2$ に対応．

$x = \dfrac{u+v}{2}, y = \dfrac{-u+v}{2}$ よりヤコビアン (の絶対値) を使って

$$dxdy = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| dudv = \frac{dudv}{2}$$

$$\iint_D (x-y)e^{x+y}\, dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2 u\, du \int_0^2 e^v\, dv = e^2 - 1$$

[注] $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と表すと $\det A = 2$ であり

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ なのでヤコビアンは $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1/2$.

ヤコビアンの絶対値を使うわけだが，今は行列式が始めから正．
<u>行列式が負のときは絶対値を忘れると大間違いである．</u>
例えば本問で u, v を入れ替えて $x + y = u, x - y = v$ としてみよ．

(2) $x=ar\cos\theta\,,y=br\sin\theta$ とおく．楕円が相手なので極座標と少し違う．
D に対応するのは $E:\ 0\le r\le 1\,,0\le\theta\le 2\pi$.

$$dxdy=\left|\begin{pmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}\right|drd\theta=\left|\begin{pmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{pmatrix}\right|drd\theta=abr\,drd\theta$$

$$\iint_D x^2\,dxdy=a^3b\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr$$

$$=\frac{a^3b}{8}\int_0^{2\pi}(\cos 2\theta+1)\,d\theta=\frac{\pi a^3b}{4}$$

(3) $u=x+y,v=y$ のとき $dxdy=dudv$ で $E:\ u^2+v^2\le 1$ が D に対応．
$u=r\cos\theta,v=r\sin\theta$により ($xy$ 平面ではなく)uv 平面に極座標を導入．
$dudv=rdrd\theta$であり E に対応するのは $0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi$.

$$\iint_D(x+y)^4\,dxdy=\iint_{u^2+v^2\le 1}u^4\,dudv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^5\cos^4\theta dr=\frac{\pi}{8}.$$

[注]D は楕円とその内部である．線型代数の 2 次形式の理論で分かる．

問 5.2 の 3.

$x=r\sin\theta\cos\varphi\,,y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$とおく．
$dxdydz=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

(1) $D:0\le r\le a,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$$\iiint_D x\,dxdydz=\int_0^a r^3\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{\pi a^4}{16}$$

(2) $D:0\le r\le a,0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le 2\pi$

$$\iiint_D(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^a r^4\,dr=\frac{4\pi a^5}{5}$$