微積分学 I　問題 4.2

$x=\varphi(t)=pt, y=\psi(t)=qt$ で $z=f(x,y)=ax+by$ のとき合成関数は $z=f(\varphi(t),\psi(t))=apt+bqt$ となる．行列で書けば $z=(a\ b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t(a\ b)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$. このとき $\dfrac{dz}{dt}=ap+bq=(a\ b)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=(\partial z/\partial x\ \partial z/\partial y)\begin{pmatrix}dx/dt\\dy/dt\end{pmatrix}$. これを一般化したのが定理 4.2.4 である．

$x=\varphi(t)=pu+qv, y=\psi(t)=ru+sv$ で $z=f(x,y)=ax+by$ のとき合成関数 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ を行列で書けば $z=(a\ b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(a\ b)\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix}\dfrac{dz}{du}&\dfrac{dz}{dv}\end{pmatrix}=(ap+br\ aq+bs)=(a\ b)\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=(\partial z/\partial x\ \partial z/\partial y)\begin{pmatrix}\partial x/\partial u&\partial x/\partial v\\\partial y/\partial u&\partial y/\partial v\end{pmatrix}$. これを一般化したのが定理 4.2.5.

問題 4.2 の 4.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2-2xy(=e^{2t}-2t^2e^t)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy-x^2(=2t^2e^t-t^4)$ である．また $\dfrac{dx}{dt}=2t, \dfrac{dy}{dt}=e^t$ である．定理 4.2.4(を行列で書いたもの) より

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=(\partial z/\partial x\ \partial z/\partial y)\begin{pmatrix}dx/dt\\dy/dt\end{pmatrix}=(e^{2t}-2t^2e^t\quad 2t^2e^t-t^4)\begin{pmatrix}2t\\e^t\end{pmatrix}\\&=2e^{2t}(t^2+t)-e^t(t^4+4t^3)\end{aligned}$$

(2) 以下は略

問題 4.2 の 5.

(1) $z_x=y^2+2xy(=3u^2-2uv-v^2), z_y=2xy+x^2(=3u^2+2uv-v^2)$ である．また $\begin{pmatrix}x_u&x_v\\y_u&y_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ である．定理 4.2.5(を行列で書いたもの) より

$(z_u\quad z_v)=(3u^2-2uv-v^2\quad 3u^2+2uv-v^2)\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=(6u^2-2v^2\quad -4uv)$

(2)〜(4) は略.

(5) 高校の復習から始める．1 変数関数 g があるとき，関数 $g(x+3a)$ を x で微分すれば $g'(x+3a)$ である．$g(3x+b)$ を x で微分すれば $3g'(3x+b)$ となる．

次に $z=f(x+3y)$ について．これは 1 変数関数 $z=f(s)$ に $s=x+3y$ を代入したものである．z_x を求めるときは y を定数扱いして上の復習と同じ要領で, $z_x=f'(x+3y)$ となる．

今度は x を定数扱いすると $z_y=3f'(x+3y)$ である．

したがって定理 4.2.5 より

$$\begin{aligned}(z_u\quad z_v)&=(f'(x+3y)\quad 3f'(x+3y))\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}\\&=(10f'(10u-14v)\quad -14f'(10u-14v))\end{aligned}$$

補足: 全微分可能性

授業では扱わない話題であり，試験範囲にも入れないが，意欲ある人のために教科書の補足をする．

全微分可能性の定義を初めて読んだときには何のことやら分からないが, 実は 1 変数の場合の微分可能性の定義を 自然に 2 変数化したものである．それは次のように順番に考えていけば分かる．

まず $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=m$ となる m が存在するときに $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であると言って, $m=f'(a)$ と表すのだった．上の式は

$$x\to a \text{ のとき } f(x)-f(a)=m(x-a)+o(x-a) \tag{1}$$

と書くことが出来る．

ところで $o(x-a)$ は $o(|x-a|)$ と同じである．なぜなら $g(x)=o(x-a)$ とは $x\to a$ のとき $g(x)/(x-a)\to 0$ となることで $g(x)=o(|x-a|)$ とは $x\to a$ のとき $g(x)/|x-a|\to 0$ となることだからである．一見符号が違うように見えるが, どうせ 0 に収束するのだから符号の違いは問題にならない．

したがって (1) は下の (2) と同じである．

$$x\to a \text{ のとき } f(x)-f(a)=m(x-a)+o(|x-a|) \tag{2}$$

結局 (2) が成り立つような m が存在するときに $f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であると言って, $m=f'(a)$ と表すのである．

$|x-a|$ は 2 点 x,a の間の距離に他ならない．

微分可能とは $f(x)$ がある 1 次関数 $f(a)+m(x-a)$ で近似できて誤差は $o(|x-a|)$ 程度という意味である．

上の 1 変数の話を 2 変数の場合に真似よう．xy 平面の 2 点 (x,y) と (a,b) の距離は $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ であることに注目して 2 変数関数 $f(x,y)$ に関して (2) を真似て次のように定義する．

$$\begin{aligned}&(x,y)\to(a,b) \text{ のとき}\\ &f(x,y)-f(a,b)=m(x-a)+n(y-b)+o\Big(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\Big)\end{aligned} \tag{3}$$

となる m,n が存在するときに $f(x,y)$ は (a,b) で **(全) 微分可能**だという．

$z=f(x,y)$ を 1 次式 $z=f(a,b)+m(x-a)+n(y-b)$ で近似したいわけである．$z=f(x,y)$ の $(a,b,f(a,b))$ における接平面は $z=f(a,b)+m(x-a)+n(y-b)$ で表される．

全微分可能性とは別に偏微分可能性や偏微分係数, 偏導関数が定義されている．全微分と偏微分には関係があることが定理 4.2.1 で述べられている．すなわち (3) の記号で

$$m=f_x(a,b),\quad n=f_y(a,b)$$