微積分学 II　問題 5.4 の 1.　解答例

3 変数の変数変換公式
uvw 空間の領域 E が変換 $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ で xyz 空間の領域 D に 1 対 1 にうつるとする．またヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$ が E で (体積が 0 の集合を除いて)0 にならないとする．このとき

$$\iiint_D f(x,y)dxdy = \iiint_E f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

問題 5.4 の 1. の解答例　各問で与えられた立体を V, その体積を $v(V)$ とする．

(1)　$x =$ 一定 による断面は下記の楕円になっている:

$$\left(\frac{y}{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{c\sqrt{1-x^2/a^2}}\right)^2 \leq 1$$

この楕円の面積は $S = \pi \cdot b\sqrt{1-x^2/a^2} \cdot c\sqrt{1-x^2/a^2} = \pi bc(1-x^2/a^2)$

体積は $v(V) = \int_{-a}^{a} S\,dx = \int_{-a}^{a} \pi bc(1-x^2/a^2)\,dx = 4\pi abc/3$

または $D = \{(x,y) | (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$ とおき

$v(V) = \displaystyle\iint_D dxdy \int_{-c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}}^{c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}} dz$ で問題 5.2 の 2.(2) を真似る．

(2)　2 変数の変換でもできるが，3 変数の変換を使う方が見通しがよい．

$u = (x/a)^{\frac{1}{3}}, v = (y/a)^{\frac{1}{3}}, w = (z/a)^{\frac{1}{3}}$ とおく．

与えられた図形 V は $V' : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ に対応する．

$x = au^3$等と 3 重積分の変数変換公式より

$$v(V) = \iiint_V dxdydz = \iiint_{V'} 27a^3u^2v^2w^2\,dudvdw$$

3 次元極座標 $u = r\sin\theta\cos\varphi, v = r\sin\theta\sin\varphi, w = r\cos\theta$を導入．

$dudvdw = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

V'は $E : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$に対応する．

$$v(V) = \iiint_{V'} 27a^3u^2v^2w^2\,dudvdw$$

$= 27a^3 \int_0^1 r^8\,dr \int_0^\pi \sin^5\theta\cos^2\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = 4\pi a^3/35$

2 倍角の公式で $\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ の次数を下げるか例題 3.2.1 を使う．

θの積分は $\sin\theta\cos^n\theta$の積分に帰着されるので易しい．

または例題 5.5.1 を真似る．

(3)　z を消すと $x^2 - 2x + y^2 = 0$ つまり $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

$D : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ で考える．

D では $z=2x$(平面) が $z=x^2+y^2$(人参の形?) の上にあり，体積は
$v(V)=\iint_D (2x-x^2-y^2)\,dxdy$
極座標を導入：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, dxdy=rdrd\theta$
$E: 0\le r\le 2\cos\theta, -\pi/2\le\theta\le\pi/2$ (例題 5.2.4 に似ている)
$v(V)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta}(2r^2\cos\theta-r^3)\,dr=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}$

(4) $u=x+y, v=y+z, w=z+x$ とおく.

$$dudvdw=\left|\det\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}\right| dxdydz = 2dxdydz$$

より $dxdydz=dudvdw/2$ である (→注). 体積 $v(V)$ は
$v(V)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 dudvdw/2=1/2$
注: ていねいに書くと次のようになる.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \text{とおくと} \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

$\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)=\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}=1/2$
これは $\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)=\det A=2$ の逆数である.

(5) 3 次元極座標を使うと $(x^2+y^2+z^2)^2=z$ より $(0\le)r^3=\cos\theta$
問題の図形 V は $E: 0\le r\le\cos^{\frac{1}{3}}\theta, 0\le\theta\le\pi/2, 0\le\varphi\le 2\pi$に対応する.
(θの範囲は$\cos\theta=r^3\ge 0$ から出る. $z\ge 0$ からと言ってもよい.)

$$v(V)=\iiint_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\cos^{\frac{1}{3}}\theta}r^2\,dr=\frac{\pi}{3}$$

(3) の $z=x^2+y^2=(z$ 軸からの距離$)^2$ のグラフは放物線を軸の周りに回転した形で回転放物面と呼ばれる. この関数は $x=y=0$ で極小になっている. (5) の形を調べるのは極座標が最適. 下図の太線を z 軸の周りに回転した形になっている.