微積分学 II　問題 6.2 の 2. と 4.　山根・八田

(ア) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (無限等比級数, $\overset{\text{ノイマン}}{\text{Neumann}}$級数)　(イ) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$

問題 6.2 の 2　　!! の定義は p.156

(1)　(イ) で $\alpha = 1/2$ とおいて x に x^2を代入.

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)\cdots(3/2-n)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!}$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!} x^{2n} \Big(2^n n! = (2n)!!\text{とも書ける}\Big)$$

(2)
$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(1/2-n)}{n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}$$

(3)　$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ とおくと

$$f(0) = 0,\ f'(x) = \frac{1 + x/\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

注: (2) の答えを項別積分した. 一般に $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$

(4)
$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\Big(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+x/3}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(-\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-x/3)^n\Big) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-1 + (-1/3)^{n+1}\Big)x^n$$

(5)　$\dfrac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$で，項別積分して $\dfrac{1}{2}\log(1+2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-2)^n x^{n+1}}{n+1}$

$$x\log(1+2x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{n+2}}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1} x^n}{n-1}$$

(6)　(ア) より $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$. 項別微分して両辺を (-1) 倍して

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (m+1) x^m$$

$n=0$ の項は消える.　$n-1=m$ とおく. m を再び n と書くことも多い.

(7) $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\Big)$$

(8) $(\mathrm{Cos}^{-1}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{2n}}{(2n)!!}$

$$\mathrm{Cos}^{-1}(x) = \mathrm{Cos}^{-1}(0) + \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!!}$$

(9) $n \geq 2$ のとき

$$\binom{3/2}{n} = \frac{(3/2)(1/2)(-1/2)\cdots(-(2n+5)/2)}{n!} = \frac{(-1)^{n-2}3(2n+5)!!}{2^n n!}$$

$$(1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}3(2n+5)!!}{2^n n!}x^n$$

問題 6.2 の 4　まともに微分するよりも既知の展開に結びつける方が楽.

(1) $x-1=t$ とおく.

$$\frac{x+1}{x^2+3x} = \frac{2}{3(t+4)} + \frac{1}{3(t+1)} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-t}{4})^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2+4^{-n})t^n = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2+4^{-n})(x-1)^n$$

(2) $x-\frac{\pi}{3}=t$ とおく.

$$\cos x = \cos(t+\frac{\pi}{3})$$

$$= \frac{\cos t - \sqrt{3}\sin t}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} - \sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\pi/3)^{2n}}{(2n)!} - \sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\pi/3)^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)$$

特別付録: 数列の極限について深く理解する(詳しくは微積分学 III)

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ とする. n を十分大きくとれば $\ell - 1 < a_n < \ell + 1$. 同様に n を十分大きく (先ほどよりもっと大きく) とれば $\ell - 0.1 < a_n < \ell + 0.1$ である. 1 や 0.1 の代わりに 0.00001, 0.000000001 などとしても (必要ならもっと大きな n をとることによって) 同様のことが言える. つまり

> $\varepsilon > 0$ がどんなに小さくても, それに合わせて n を十分大きくとれば
> $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ が成り立つ.

定理 6.2.5 の証明等でこれの変種を使う. すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \ell$ が存在するならば $\varepsilon > 0$ がいくら小さくても N を十分大きくとれば $\ell - \varepsilon < \sum_{n=0}^{N} b_n$. よって $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$. ($a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ として上の話を当てはめる.)