微積分学 I　4.4 節 陰関数定理

$\boxed{\textbf{問題 4.4. の 3.}}$ 方程式の左辺を $f(x)$ とおく．一般に曲線 $f(x,y)=0$ の上の点 (a,b) における接線は $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$,　法線は $f_y(a,b)(x-a)-f_x(a,b)(y-b)=0$ である．f_x, f_y に $x=a, y=b$ を代入することを忘れてはいけない．もし代入せずに x,y のままだったら，直線の式 (x,y の 1 次方程式) にならない.

(1) $f_x(x,y) = 6x-y^3+2y-1$, $f_y(x,y) = -3xy^2+2x+1$, $f_x(1,2)=1$, $f_y(x,y)=-9$ となる．したがって接線は $x-9y+17=0$, 法線は $9x+y-11=0$.
(2) $f_x(x,y)=e^{2y}-ye^{xy}+\pi y\cos\pi xy$, $f_y(x,y)=2xe^{2y}-xe^{xy}+\pi x\cos\pi xy+1$, $f_x(0,1)=e^2-1+\pi$, $f_y(0,1)=1$ となる．したがって接線は $(e^2-1+\pi)x+y-1=0$, 法線は $x-(e^2-1+\pi)(y-1)=0$.

$\boxed{\textbf{問題 4.4. の 5.}}$ まず一般に $\varphi'(a)=0, \varphi''(a)>0$ なら漸近展開を考えれば判るように (あるいは凸性から判るように) $\varphi(x)$ は $x=a$ で極小値をとる．$\varphi'(a)=0, \varphi''(a)<0$ なら極大値をとる.
(1) $f_x(x,y)=2x+y, f_y(x,y)=x+4y$ より $\varphi'(x)=-(2x+y)/(x+4y)$, したがって商の微分法によって

$$\varphi''(x) = -\frac{(2+y')(x+4y)-(2x+y)(1+4y')}{(x+4y)^2} = \frac{7(xy'-y)}{(x+4y)^2}$$

さて $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow y=-2x$ である．これを $x^2+xy+2y^2=1$ に代入して $x=\pm1/\sqrt{7}$. よって $y=-2x=\mp2/\sqrt{7}$ (以下全て複号同順). そして $\varphi''(\pm1/\sqrt{7})=\pm2\sqrt{7}$. したがって $x=1/\sqrt{7}$ のとき極小値 $-2/\sqrt{7}$, $x=-1/\sqrt{7}$ のとき極大値 $2/\sqrt{7}$ をとる.
(2) $f_x(x,y)=2x-y$, $f_y(x,y)=-x+3y^2$ より $\varphi'(x)=(2x-y)/(x-3y^2)$ である．$\varphi'(x)\Leftrightarrow y=2x$ であり，これを $x^2-xy+y^3=7$ に代入して $x^2-2x^2+8x^3=7$ となる．左辺を因数分解すると $(x-1)(8x^2+7x+7)=0$ で実数解は $x=1$ のみである．よって $y=2x=2$ となる.

$$\varphi''(x) = \frac{(2-y')(x-3y^2)-(2x-y)(1-6yy')}{(x-3y^2)^2}$$

であり，$x=1$ のとき $y'=0, y=2$ だから $\varphi''(1)=-2/11<0$. したがって $x=1$ のとき極大値 2 をとる.
注 線型代数の 2 次形式の理論を学べば, (1) の曲線が楕円であることが判る．また，GRAPES でグラフが描ける.