微積分学 II　問題 5.1 の 1. と 2.　解答例[1]

問 5.1 の 1.

(1) $$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} xe^y\,dy = \int_0^2 (xe^{2x} - xe^{x^2})\,dx = \int_0^2 x\Big(\frac{e^{2x}}{2}\Big)'\,dx - [e^{x^2}/2]_0^2$$
$$= [xe^{2x}/2]_0^2 - \int_0^2 e^{2x}/2\,dx - [e^{x^2}/2]_0^2 = e^4/4 + 3/4$$

(2) $$\int_0^1 dy \int_0^{\pi/2} y\sin(xy)\,dx = \int_0^1 \{1-\cos(\pi y/2)\}\,dy = 1 - 2/\pi$$

問 5.1 の 2.

(1) $$\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} \sin(2x+y)\,dy = \int_0^{\pi/2} \{\cos(2x) - \cos(2x+\pi/2)\}\,dx = 1$$

(2) $$\int_2^3 dy \int_1^2 (x^2y + y^2)\,dx = \int_2^3 (y^2 + 7y/3)\,dy = 73/6$$

(3) $D:\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}, -1 \le y \le 1$
$$\int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx = \int_{-1}^1 (1-y^2)/2\,dy = 2/3$$
(D を $0 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$ と表せば y の積分が先)

(4) D は x, y 両軸につき対称, 被積分関数は x, y につき偶関数だから
$0 \le x \le \sqrt{a^2-y^2}, 0 \le y \le a$ における積分を 4 倍すればよい.
$$\text{与式} = 4\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2}\ dx = 4\int_0^a (a^2-y^2)\,dy = 8a^3/3$$

(5) $D:\ 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1$　(図示せよ．直角 2 等辺 3 角形である．)
$$\int_0^1 dx \int_0^x xy^2\,dy = \int_0^1 x^4/3\,dx = 1/15$$

(6) D を $D_1:\ x \le y \le 2x, 0 \le x \le 1$ と
$D_2:\ x \le y \le -x+3, 1 \le x \le 3/2$ に分ける．(図を描いてみよ．)
$$\iint_{D_1} = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (2x-y)\,dy = \int_0^1 x^2/2\,dx = 1/6$$
$$\iint_{D_2} = \int_1^{3/2} dx \int_x^{-x+3} (2x-y)\,dy = \int_1^{3/2} (-4x^2 + 9x - 9/2)\,dx = 5/24$$
$$\iint_D = 1/6 + 5/24 = 3/8$$

[1] 教学補佐の八田君 (M1) が作ったものに山根が手を加えました.

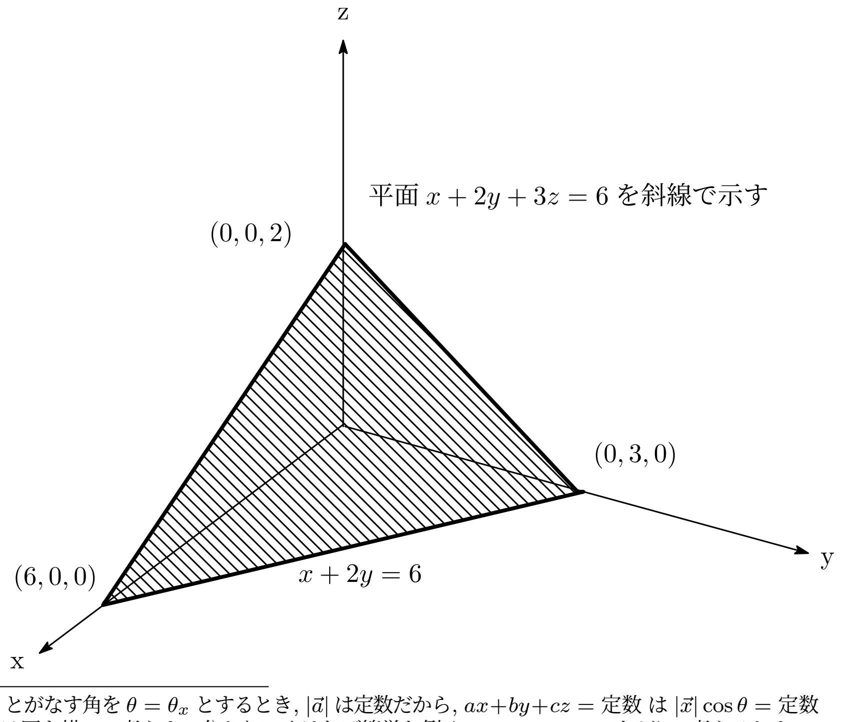
(7) $$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} z\,dz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2/2\,dy = \int_0^1 (1-x)^3/6\,dx = 1/24$$

(8) $D:\ 0\le x\le 6, 0\le y\le -x/2+3, 0\le z\le -x/3-2y/3+2$
$$\int_0^6 dx\int_0^{-x/2+3} dy\int_0^{-x/3-2y/3+2} y\,dz$$
$$=\int_0^6 dx\int_0^{-x/2+3}\{(2-x/3)y-2y^2/3\}\,dy$$
$$=\int_0^6 (-x/2+3)^3/9\,dx = 9/2$$

3 次元空間における 1 次方程式と 1 次不等式

$\vec{a}=(a,b,c), \vec{x}=(x,y,z)$ のとき $ax+by+cz=d\,(ax+by+cz\le d)$ は $\vec{a}\cdot\vec{x}=d\,(\vec{a}\cdot\vec{x}\le d)$ のように内積を用いて書ける．内積の図形的な意味づけより，これは $\vec{a}$ に垂直な平面 (を境界とする半空間) を表す．[2]

2. (7) の領域 D は原点と点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ を頂点とする 4 面体である．(8) の領域 D も 4 面体である．$y\le -x/2+3$ すなわち $x+2y=6$ は平面 $x+2y+3z=6$ と xy 平面 $(z=0)$ との交線である．



[2] $\vec{a}$ と $\vec{x}$ とがなす角を $\theta=\theta_x$ とするとき，$|\vec{a}|$ は定数だから，$ax+by+cz=$ 定数 は $|\vec{x}|\cos\theta=$ 定数 を表す．後は図を描いて考えよ．分かりにくければ簡単な例 $(a=1,b=c=0$ など$)$ で考えるとよい．