微積分学 II　問題 6.2 の 3.　山根・八田

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n \text{ だから } f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \text{ なら } f^{(n)}(0)=n!\,a_n$$

（$n!$ を忘れてはいけない．）

(1) $$x^2\log(1+x)=x^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}x^m=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}x^{m+2}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-2}x^n$$
$$=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-2}x^n$$

(注: $m=n-2$ と置いた．)

$$f^{(n)}(0)=0\,(n=0,1,2),\ f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}\,(n\geq 3)$$

(2) $$(1+x)e^{x^2}=(1+x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{m!}$$
$$f^{(2m)}(0)=\frac{(2m)!}{m!},\quad f^{(2m+1)}(0)=\frac{(2m+1)!}{m!}$$

(3) $$\mathrm{Tan}^{-1}(2x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2x)^{2m+1}}{2m+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m2^{2m+1}x^{2m+1}}{2m+1}$$
$$=0+2x+0\cdot x^2-\frac{2^3}{3}x^3+0\cdot x^4-\cdots\quad(\text{偶数次の項の係数は }0)$$
$$f^{(2m+1)}(0)=\frac{(-1)^m(2m+1)!2^{2m+1}}{2m+1}=(-1)^m2^{2m+1}(2m)!$$
$$f^{(2m)}(0)=0$$

(4) $$\frac{x^2}{(x-2)(x+1)}=\frac{x^2}{3}\Big(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{1+x}\Big)=\frac{x^2}{3}\Big(\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\Big)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3}(2^{-n-1}+(-1)^n)x^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-1}{3}\{2^{-n+1}+(-1)^n\}x^n$$
$$f^{(n)}(0)=0\,(n=0,1),\ f^{(n)}(0)=\frac{-n!}{3}\{2^{-n-1}+(-1)^n\}\,(n\geq 2)$$

補足　$|x|<1$ において $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ である．これを使えば次が分かる．$a\neq 0$ と $b\neq 0$ が定数のとき $|x|<|a/b|$ において

$$\frac{1}{a+bx}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-(-bx)/a}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-bx}{a}\right)^n$$