微積分学 II　問題 5.4 の 4.　解答例　山根・八田

以下の各問で求める曲面積を S とする.

(1) $z = f(y) = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$. 上半分の面積を 2 倍. $f_y = -y/\sqrt{a^2 - y^2}$

$x^2 + y^2 = a^2$の内部だから $D: -\sqrt{a^2 - y^2} \le x \le \sqrt{a^2 - y^2}, -a \le y \le a$

$$S_+ = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy$$

$$= \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,dx = \int_{-a}^{a} 2a\,dy = 4a^2$$

$S = 2S_+ = 8a^2$

(2) 底面の半径が a の円柱 (横倒し) の側面積である. 高さを知りたい.

$y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ より $x = \pm a$ で高さは $2a$.

$S = 2a \cdot 2\pi a = 4\pi a^2$.

$z = \pm\sqrt{a^2 - y^2}, -a \le x \le a, -a \le y \le a$ を正攻法で攻めてもできる.

(3) $z = f(x, y) = x^2 + y^2, f_x = 2x, f_y = 2y$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$D: x^2 + y^2 \le a$ は $E: 0 \le r \le \sqrt{a}, 0 \le \theta \le 2\pi$ に対応する.

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a}} r\sqrt{1 + 4r^2}\,dr$$

$$= \frac{\pi}{6}[(1 + 4a)^{\frac{3}{2}} - 1]$$

(4) $z = f(x, y) = xy, f_x = y, f_y = x,$

$D: x^2 + y^2 \le a^2$ は極座標では $E: 0 \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi$ に対応する.

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} r\sqrt{1 + r^2}\,dr = \frac{2\pi}{3}[(1 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$$

(5) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z_x = -x/z, z_y = -y/z,$

$x^2 + y^2$を消去すると $4 - z^2 = 2z + 1$ より $z = -3, 1$

ところが $2z + 1 = x^2 + y^2 \ge 0$ だから $z = 1$.

結局 $x^2 + y^2 = 3$ で 2 曲面が交わる.

$D: x^2 + y^2 \le 3$ は極座標で言うと $E: 0 \le r \le \sqrt{3}, 0 \le \theta \le 2\pi$.

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (x^2 + y^2)/z^2}\,dxdy = \iint_D \frac{2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}}\,dr = 4\pi$$