微積分学 II　問題 6.2　山根・八田

定理 6.2.3　$\sum a_n x^n$ の収束半径を r とする．このとき

（ア）$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するなら $r = 1/\ell$

（イ）$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が存在するなら $r = \ell$

(ア)(イ) で $\ell = 0, \infty$ でもよく，(ア) で $\ell = 0, \infty$ ならそれぞれ $r = \infty, 0$.

r は必ず存在するが ℓ は必ずしも存在しないので, 上のような書き方になる.

問 6.2 の 1　以下の各問で求める収束半径を r とする.

(1)　(イ) より $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1$

(2)　(イ) より $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

(3)　$y = x^2$とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2^n}$である．これの収束半径を r_yとする.

(ア) より $r_y = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$　注: (イ) でも出来る.

(4)　(イ) より $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n = e$

ここで例題 1.1.1 の自然対数の底 (ネピアの定数)e の定義を用いた.

(5)　(イ) より $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 1$

[平均値の定理による別解] $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ より $j = 0, 1$ に対し

$\sqrt{n+j+1} - \sqrt{n+j} = 1/(2\sqrt{n+j+\theta_j})$, $0 < \theta_j < 1$ を満たすθ_jがある.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1+\theta_1}}{\sqrt{n+\theta_0}} = 1$$

(6)　(ア) で解くなら

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^{n^2}|} = \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0\,(|a|<1), 1\,(|a|=1), \infty\,(|a|>1)$$

$r = \infty\,(|a|<1), 1\,(|a|=1), 0\,(|a|>1)$

(イ) で解くなら

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^{n^2}}{a^{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a|^{2n+1}} = \infty\,(|a|<1), 1\,, (|a|=1)\,, 0\,(|a|>1)$$

(7)　(イ) より $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!(2n+2)!!}{(2n)!!(2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1$

(8)　(イ) より $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!(n+1)^{n+1}}{n^n (2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e/2$