微積分学 I　問題 1.1 の 1., 問題 1.3 の 3.

問題 1.1. の 1

(1) まず $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$ である.

$$\frac{1}{a_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \to e$$

なので $a_n \to 1/e$.

(2) 有理化して

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$$

[別解] 平均値の定理と $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より

$$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{c_n}}, \quad n < c_n < n+1$$

をみたす c_n が存在する．$n \to \infty$ のとき $c_n \to \infty$ なので $a_n \to 0$.（この方法なら平方根に限らず何乗根でもできる．）

問題 1.3. の 3.

(1) $a \neq 0$ のとき $ax = t$ とおいて

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} = \lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{1/t}\right\}^a = e^a$$

多分著者の想定外だとは思うが $a = 0$ のときもやっておく．このとき $(1+ax)^{1/x} = 1^{1/x} = 1\,(x \neq 0)$ なので $x \to 0$ の極限値は $1 (= e^0)$

(2) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x} + \dfrac{e^{-x}-1}{-x} \to 1 + 1 = 2$ (例題 1.3.2. を使った.)

より一般に $f(x)$ が $x = a$ で微分可能とすると $h \to 0$ のとき

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$$\to f'(a) + f'(a) = 2f'(a)$$

これの $f(x) = e^x, a = 0$ の場合が上の問題.

(3) $x \to 1$ のとき $x - 1 = t$ とおくと

$$x^{\frac{1}{1-x}} = (1+t)^{-\frac{1}{t}} = 1/(1+t)^{\frac{1}{t}} \to 1/e$$