微積分学 I　4.1 節

Function View (フリー), Mathmedia(3000 円) を使えば美しい 3D グラフを作成できる．Mathmedia は機能制限付なら無料．

極限値が存在する場合　点 (a,b) を中心とする極座標を使って $x=a+r\cos\theta, y=b+r\sin\theta$ とおくと便利である．(x,y) が点 (a,b) に限りなく近づくというのは $r\to+0$ ということに他ならない．θ は任意である (例題 4.1.2 参照).

極限値が存在しない場合　近づき方をうまく 2 通り選んで, 値が違ってしまうことを示すタイプの問題が多い (例題 4.1.1 参照).

ただし，これで全てを尽くすわけではない．例えば $(x^2+y^2)^{-1}$ は，$(x,y)\to(0,0)$ のときどのような近づき方をしても ∞ になって極限値が存在しない．

問題 4.1. の 1.

以下 (1), (4), (5) では $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおく．$|\cos\theta|\le 1, |\sin\theta|\le 1$ を使ってはさみうちする．

(1) $0\le\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\left|\dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}\right|\le r\to 0$ より求める極限値は 0. ここでは次数が重要で, 分子が x^2y でなくても x,y について 3 次以上の項のみからなっていればやはり極限値は 0 となる．例えば $5xy^2$ でも $-3x^3y^2$ でもいい．それらの和や差でも当然極限値は 0.

(2) 分子が 2 次なので (1) と同じようにはいかない．x 軸 $(y=0)$ に沿って点 $(x,0)$ が点 $(0,0)$ に限りなく近づくとき，$(x^2-2y^2)/(x^2+y^2)=1\to 1$ である．また，y 軸 $(x=0)$ に沿って点 $(0,y)$ が点 $(0,0)$ に限りなく近づくとき，$(x^2-2y^2)/(x^2+y^2)=-2\to -2$ である．以上より極限値なし．

(3) 極限値なしであることが (2) と同様にして分かる．

(4) $0\le x^2+y^2\le 2x^2+y^2$ より $0\le\left|\dfrac{x^3+x^2y}{2x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{x^3+x^2y}{x^2+y^2}\right|\to 0$

(5) $0\le\left|\dfrac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\dfrac{r^{3/2}\cos\theta\sqrt{|\sin\theta|}}{r}\right|\le r^{1/2}\to 0$

(6) 分母は 2 次の項と 4 次の項が混ざっていて一癖ある．点 (x,y) が $y=a\sqrt{x}, x>0$ (a は定数) に沿って $(0,0)$ に近づく (つまり $x\to 0$) とする．$f(x,a\sqrt{x})=\dfrac{a^2}{a^4+1}$ なので a によって値が違ってしまう．これで答案としては十分だが，ついでに他のもやっておくと，$y=x$ に沿って近づくなら $f(x,x)=\dfrac{x}{x^2+1}\to 0$ である．$y=x^{1/4}, x>0$ に沿ってなら $f(x,x^{1/4})=\dfrac{x^{1/2}}{x+1}\to\infty$ である．

問題 4.1. の 3.

(2) は 1. の (3) を真似る．(3) は原点以外で $z=1+\dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2}=1+\dfrac{3\text{ 次以上の項}}{x^2+y^2}$ とする．