微積分学 II　問題 5.3 の 1. と 2.　解答例　山根・八田

問 5.3 の 1.

(1) $x = t, y = -t + 2, dx = dt, dy = -dt, t : 1 \to -1$

$$\int_C x^2\,dx + 2xy\,dy = \int_1^{-1} (3t^2 - 4t)\,dt = -2$$

(2) $x = t, y = t^2, dx = dt, dy = 2tdt, t : 0 \to 2$

$$\int_C xy\,dx + e^{x^2}\,dy = \int_0^2 (t^3 + 2te^{t^2})\,dt = 3 + e^4$$

(3) $x = \cos t, y = \sin t, dx = -\sin tdt, dy = \cos tdt, t : 0 \to \pi$

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_0^{\pi} (-\sin^3 t + \cos^3 t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \Big\{-\sin t(1 - \cos^2 t) + \cos t(1 - \sin^2 t)\Big\}dt$$

$$= \Big[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t + \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\Big]_0^{\pi} = -\frac{4}{3}$$

問 5.3 の 2

グリーンの公式 $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy$

ここで C は D の境界, 本問の場合は C は単位円周 (逆時計回り), D は単位円盤.

(1) $P = e^x + y, Q = y^4 + x^3$とおいて上式にあてはめる.

$$\int_C (e^x + y)\,dx + (y^4 + x^3)\,dy = \iint_D (3x^2 - 1)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r(3r^2\cos^2\theta - 1)\,d\theta = \int_0^1 (3\pi r^3 - 2\pi r)\,dr = -\frac{\pi}{4}$$

(2) $P = y^3 - y, Q = 3y^2x - x$ とおいて上式にあてはめる

$$\int_C (y^3 - y)\,dx + (3y^2x - x)\,dy = \iint_D [(3y^2 - 1) - (3y^2 - 1)]\,dxdy = 0$$

(p.124 例 4,5 参照.)