微積分学 I　逆三角関数 (問題 1.3 の 2., 問題 2.1 の 1.)

問題 1.3. の 2

(1) $\theta = \mathrm{Cos}^{-1}x = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{5}$ とおく．Cos^{-1} の定義より $0 \leq \theta \leq \pi$, Tan^{-1} の定義より $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ なので $0 \leq \theta < \pi/2$. よって $x = \cos\theta > 0$.

$\tan\theta = \sqrt{5}$ なので $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 6 \Rightarrow x = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

(2) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{3}, \beta = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{7}{9}$ とおく．$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\sin\beta = \dfrac{7}{9}$.

また Sin^{-1} の定義より $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$ なので $\cos\alpha \geq 0$, $\cos\beta \geq 0$. $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. 加法定理より $x = \cos(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{3}$

問題 2.1. の 1　合成関数の微分法等を使う．

(7) まず Sin^{-1} の定義から $-1 \leq x^3 + 1 \leq 1$ でなければならないので $-\sqrt[3]{2} \leq x \leq 0$ である．微分できるためには $-\sqrt[3]{2} < x < 0$ でなければならない．そして

$$\left(\mathrm{Sin}^{-1}(x^3+1)\right)' = \frac{(x^3+1)'}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{-x^3(2+x^3)}} \left(= \frac{-3x}{\sqrt{-x(2+x^3)}} \right)$$

(8) 式が長くなるので分けて計算する．一般に $\left(\mathrm{Tan}^{-1}f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$.

今は $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = -1 + \dfrac{2}{1+x^2}$ の場合であって

$$1 + f(x)^2 = \frac{2(x^4+1)}{(1+x^2)^2}, \quad f'(x) = \left(\frac{2}{1+x^2}\right)' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2},$$

$$\left\{\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right\}' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} = -\frac{2x}{x^4+1}$$

(10) $\{\exp(\mathrm{Tan}^{-1}x)\}' = \exp(\mathrm{Tan}^{-1}x) \cdot (\mathrm{Tan}^{-1}x)' = \dfrac{\exp(\mathrm{Tan}^{-1}x)}{1+x^2}$

(11) $a > 0$ より $\left(\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ であり，

$\left(x\sqrt{a^2-x^2}\right)' = \sqrt{a^2-x^2} + x \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ なので

$\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{2a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{a^2-x^2}$

(12) 一般に $\left(\mathrm{Sin}^{-1}f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ で，今は $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ の場合.

$f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$, $1 - f(x)^2 = \dfrac{1}{1+x^2}$ より $\left(\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(13) $\left(2\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$