微積分学 I　問題 2.4. など

$f(x)$ が開区間 I において n 回微分可能とする．I の点 a を固定する．
(1) 曲線 $y=f(x)$ の $(a,f(a))$ における接線の方程式は $y=f(a)+f'(a)(x-a)$
(2)[平均値の定理] 各 $x\in I$ に対して $f(x)=f(a)+f'(a+\theta(x-a))(x-a)$, $0<\theta<1$ をみたす θ が存在する．同じことだが $f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$ をみたす c が a と x の間に存在する [c が a と x を $\theta:1-\theta$ に内分するとき $c=(1-\theta)a+\theta x=a+\theta(x-a)$].
(3)[有限テーラー展開] $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$, $0<\theta<1$ をみたす θ が存在する．[$a=0$ の場合を有限マクローリン展開という.]
(注) $f'(a),f^k(a)$ 等を $f'(x),f^k(x)$ とする間違いが多い．例えば (1) でそのように間違えたら直線の式 (1 次方程式) にならないので，いかにも変である．(3) では $f(x)$ を $n-1$ 次式で近似したいのだからやはり $f^k(x)$ では明らかにおかしい．このようなナンセンス極まる間違いは絶対に避けなければならない．

問題 2.4 の 6.

この問題に対する教科書の模範解答の数値は少し変なものがある．ただし，大間違いという訳ではない．

(1) $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k!}x^k+\frac{e^{\theta x}}{6}x^6$, $0<\theta<1$ に $x=1/2$ を代入すると

$$e^{1/2}=\sum_{k=0}^{5}\frac{(1/2)^k}{k!}+\underbrace{\frac{e^{\theta/2}}{6!}(1/2)^6}_{\text{剰余項}},\ 0<\theta<1$$

すなわち $e^{1/2}\fallingdotseq\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{(1/2)^k}{k!}\fallingdotseq 1.64869791667$ であり，$0<\theta<1, e<3$ より

$|$ 剰余項 (誤差)$|<\dfrac{3}{6!}(1/2)^6<0.00007$ となる．求める近似値は 1.6487 で誤差は 0.0001 以内とするのがいいだろう．

(2) $\log(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k-\frac{1}{6(1+\theta_1x)^6}x^6, 0<\theta_1<1$

$$\log(1-x)=\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(-x)^k-\frac{1}{6(1-\theta_2x)^6}x^6, 0<\theta_2<1$$

辺々引いて, $\log\dfrac{1+x}{1-x}=\log(1+x)-\log(1-x)$ より

$\log\dfrac{1+x}{1-x}=2x+\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{5}-\left\{\dfrac{1}{(1+\theta_1x)^6}-\dfrac{1}{(1-\theta_2x)^6}\right\}\dfrac{x^6}{6}$ となる．$x=1/3$ を代入して $\log\dfrac{1}{2}\fallingdotseq 0.693004115226$ である．$0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$ より $1+\theta_1/3>1$, $2/3<1-\theta_2/3<1$ なので

$$
\begin{aligned}
|\text{剰余項 (誤差)}| &< \left\{ \left| \frac{1}{(1+\theta_1 x)^6} \right| + \left| \frac{1}{(1-\theta_2 x)^6} \right| \right\} \frac{x^6}{6} \\
&< \left\{ 1 + \left(\frac{3}{2} \right)^6 \right\} \frac{(1/3)^6}{6} \fallingdotseq 0.002832790352
\end{aligned}
$$

求める近似値は 0.693 で誤差は 0.003 以内.

(3) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{\sin(\theta x)}{6!} x^6$ だから

$\sin 0.1 \fallingdotseq 0.1 - \dfrac{0.1^3}{3!} + \dfrac{0.1^5}{5!} \fallingdotseq 0.099833416667$ であり,

$|\text{剰余項 (誤差)}| < \dfrac{1}{6!} \cdot 0.1^6 < 0.0000000139$. 求める近似値は 0.09983342 で誤差は 0.0000000014 以内.

注　問題 2.4 はどんな答え方を要求しているのか曖昧だが, 練習問題だからこれで十分である. 学力をつけるのに役立てばそれでよい.

試験問題の場合は例えば「百万分の一の位で四捨五入せよ」などのように細かく指示することになるであろう.

問題 2.4 の 1. 穴埋めバージョン

有限マクローリン展開の $n=4$ の場合

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4 \\ \quad = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3}_{3\text{次近似式}} + \underbrace{\frac{f^{(4)}(\theta x)}{24}x^4}_{\text{剰余項}} \\ 0 < \theta < 1 \end{cases}$$

(1) $f(x) = \sin x$ の場合，$f'(x) = \boxed{\text{ア}}$, $f'(0) = \boxed{\text{イ}}$, $f''(x) = \boxed{\text{ウ}}$, $f''(0) = \boxed{\text{エ}}$, $f'''(x) = \boxed{\text{オ}}$, $f'''(0) = \boxed{\text{カ}}$ から 3 次近似式の係数が決まる．$f^{(4)}(x) = \boxed{\text{キ}}$ より剰余項が分かる．求める有限マクローリン展開 $(n=4)$ は $\sin x = \boxed{\text{ク}}$ である．

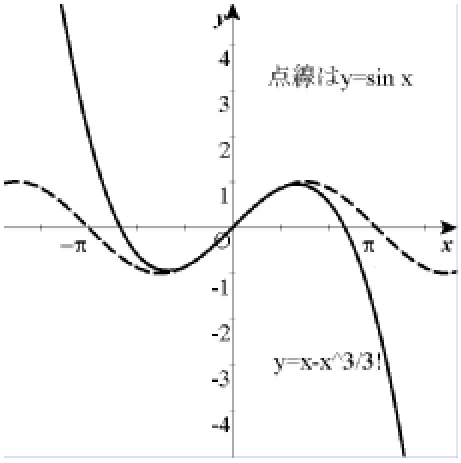
(2) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ の場合．$f'(x) = \boxed{\text{ケ}}$, $f'(0) = \boxed{\text{コ}}$, $f''(x) = \boxed{\text{サ}}$, $f''(0) = \boxed{\text{シ}}$, $f'''(x) = \boxed{\text{ス}}$, $f'''(0) = \boxed{\text{セ}}$ から 3 次近似式の係数が決まる．$f^{(4)}(x) = \boxed{\text{ソ}}$ より剰余項が分かる．求める有限マクローリン展開 $(n=4)$ は $\sqrt{1+x} = \boxed{\text{タ}}$ である．

(3) $x\sin x$ (4) $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$

教科書は (4) までだが (5) 以降を追加しよう (実は問題 2.4 の 2. を易しくしたもの)．

(5) $\cos x$ (6) e^{2x} (7) $\log(1+x)$

GRAPES(ブルーバックス「パソコンらくらく高校数学 微分・積分」付録 CD-ROM またはインターネットから入手可) で作成した図



問題 2.4 の 3.
(コツ 1) 例 13 の $(\cos x)e^x$ と同様に，一般に $f(x), g(x)$ の漸近展開が分かれば積 $f(x)g(x)$ の漸近展開が分かる．まともに $f(x)g(x)$ を何度も微分するのは賢明ではない．
(コツ 2) $o(x^n)$ は x^n より速く 0 に収束する何らかの関数を表す．「何らかの」だから，無数にあるうちのどれでもよい．例えば $x \to 0$ のとき $x^3 = o(x^2)$ も $x^4 = o(x^2)$ も正しい．a, b が定数のとき $ax^3 + bx^4 + o(x^2) = o(x^2)$ である．
(1) $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3)$ なので

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)\cos x &= (1+x^2)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + x^2 o(x^3)\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)
\end{aligned}
$$

上の最後の等号で $-x^4/2, x^2 o(x^3)$ は $o(x^3)$ の中に繰り込んだ．
(2) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$ なので

$$
(2-x)\sqrt{1+x} = (2-x)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) = 2 - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)
$$

(3) $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!} + o(t^3)$ に $t = 2x$ を代入して，$o(t^3) = 8o(x^3) = o(x^3)$ より，$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4x^3}{3} + o(x^3)$．また，$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ である．掛け合わせて $e^{2x}\sin x = x + 2x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 + o(x^3)$.
(4) 今は真面目に微分するしかない．6 章を勉強すれば楽な別解がある．$f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, f''(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$，$f'''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$ より $\mathrm{Tan}^{-1}x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

問題 2.4 の 4.
教科書に詳しい解答がある.

何乗まで漸近展開すれば良いかを見抜くのは難しい. 迷ったら長めにやれば良い. 長すぎて無駄手間になるかも知れないが, 間違いにはならない.

問題 2.4 の 5.
これも長めに展開すれば間違いない.

(1) $f(x) = x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x^3(1 + x + o(x)) = -x^4 + o(x^4)$ なので極大

(2) $f(x) = x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)$

極値をとらない.

(3) $f(x) = x^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$ 極小

(4) $t = x-1$ とおいて $t = 0$ で極値をとるかどうか調べる. $f(x) = t^2\log(1+t) - t^3$ である. $\log(1 + t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ より $f(x) = -\frac{1}{2}t^4 + o(t^4)$ 極大

数学基礎演習 I テーラーの定理

問題 1 $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 3$ は

$$f(x) = p + q(x-1) + r(x-1)^2 + s(x-1)^3 \qquad \cdots(*)$$

と表せる．p, q, r, s を求めよ．
ヒント: 力ずくで展開するのはうまくない．テーラーの定理に関連する解法がある．繰り返し微分して剰余の定理を用いよ．(答え $p = 2, q = 6, r = 8, s = 1$)

問題 2 テーラーの定理の $n = 4$ の場合を次の手順で証明しよう．

(1) $g_k(x) = \dfrac{(b-x)^k}{k!}$ $(k \geq 0)$ とおくとき $g'_k(x) = -g_{k-1}(x)$ $(k \geq 1)$ を示せ．

(2) $f(x)$ が開区間 I で 4 回微分可能とする．a, b を I の任意の 2 点とする．定数 A を

$$f(b) - \left\{ \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + A(b-a)^4 \right\} = 0 \qquad \cdots①$$

となるように定める (そういう A がただ 1 つある)．

$$\begin{aligned} F(x) &= f(b) - \left\{ \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + A(b-x)^4 \right\} \\ &= f(b) - \left\{ f(x) + f'(x)(b-x) + f''(x)\frac{(b-x)^2}{2!} \right. \\ &\qquad \left. + f'''(x)\frac{(b-x)^3}{3!} + A(b-x)^4 \right\} \qquad \cdots② \end{aligned}$$

とおくとき $F(a), F(b)$ を求めよ．

(3) $F'(x)$ を求めよ．ヒント:積の微分法と (1) を使う．

(4) $F'(c) = 0$, $a < c < b$ のとき (そういう c が本当にあるかどうかの議論は後回し) A を c を用いて表せ．

(5) ロルの定理を用いて次を示せ (テーラーの定理の $n = 4$ の場合):

$$f(b) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(b-a)^4$$

をみたす点 c が a と b の間に存在する．(c が a, b を結ぶ線分を $\theta : 1-\theta$ に内分するとすると，$c = (1-\theta)a + \theta b = a + \theta(b-a)$, $0 < \theta < 1$ とも書ける.)