微積分学 II　部分分数分解 (3.2 節の補足)　山根英司

$f(x), g(x)$ が整式のとき分数式 $h(x) = f(x)/g(x)$ を部分分数分解します．まず $f(x)$ が $g(x)$ よりも次数が大きい場合は $f(x)$ を $g(x)$ で割って $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ とします．$r(x)$ の次数は $g(x)$ の次数より小さいと仮定します．$h(x) = f(x)/g(x) = q(x) + r(x)/g(x)$ です．$q(x)$ の積分は容易なので $r(x)/g(x)$ だけを考えればいいわけです．そこで始めから $h(x) = f(x)/g(x)$ において $f(x)$ は $g(x)$ よりも次数が小さいとして考えます．さらに $g(x)$ の最高次の係数は 1 と出来ます．(f, g を同じ定数 $\neq 0$ で割る．)

分母 $g(x)$ を**実数の範囲で**因数分解します．全ての整式は 1 次式と 2 次式の積に因数分解できます．以下では一般的な話をしますが，分かりにくければ例えば $n = 0$, $n = 1$, $m = 1$ などとして読み替えてください．

$$g(x) = (x - a_1)^{p_1} \cdots (x - a_m)^{p_m}(x^2 + b_1 x + c_1)^{q_1} \cdots (x^2 + b_n x + c_n)^{q_n}$$

とします．ただし，$a_1, \ldots, a_m$ は互いに異なる定数で $b_1, \ldots b_n, c_1, \ldots, c_n$ は $j \neq k$ のとき $(b_j, c_j) \neq (b_k, c_k)$ となる定数であり，各 j について $b_j^2 - 4c_j < 0$ とします．$f(x)$ の次数は $p_1 + \cdots + p_m + 2(q_1 + \cdots + q_n) - 1$ 以下です．

このとき $h(x) = f(x)/g(x)$ は次の形の項たちの和で表すことが出来ます:

$$\frac{\text{定数}}{(x - a_i)^p}(1 \leq p \leq p_i; 1 \leq i \leq m),\ \frac{1\text{ 次式}}{(x^2 + b_j x + c_j)^q}(1 \leq q \leq q_j; 1 \leq j \leq n).$$

未定係数法で係数を求めます．求めるべき係数は $p_1 + \cdots + p_m + 2(q_1 + \cdots + q_n)$ 個です．これは上で述べた $f(x)$ の次数より 1 だけ大きく，つじつまが合います．一般に d 次式は $d + 1$ 個のパラメータで決まるからです．(もちろん，定数が 0 になることもあります．1 次式が定数だったり，0 だったりもします．)

問題 3.2 の 1. に出てくる関数を部分分数分解すると次のようになります．(1) だけは頭でっかちなので商 $q(x)$ にあたる項が現れます．

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 6} = 1 - 4/5\ (x + 2)^{-1} + 9/5\ (x - 3)^{-1}$$

$$\frac{2}{(x - 1)(x^2 + 1)} = (x - 1)^{-1} - \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{x - 1}{(2 - x)^3} = -(x - 2)^{-3} - (x - 2)^{-2}\ (-1\text{ 乗の係数が } 0)$$

$$\frac{2}{x(x - 1)(x - 2)} = x^{-1} - 2\ (x - 1)^{-1} + (x - 2)^{-1}$$

$$\frac{5x + 3}{(x + 1)(x - 1)^2} = -1/2\ (x + 1)^{-1} + 4\ (x - 1)^{-2} + 1/2\ (x - 1)^{-1}$$

$$\frac{2x}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)} = (x - 1)^{-2} - \left(x^2 + 1\right)^{-1}\ (\text{分子の 1 次式が定数})$$

この計算は高価な数式処理ソフト Maple (大学にもあります) を使いました．3000 円の Mathmedia (Windows 用) でも部分分数分解くらいなら出来るし，計算回数 20 回の制限付なら無料で使えます．