微積分学 II　問題 5.5

1.　例題 5.5.1 を真似て定理 5.5.2 の (5) によってベータ関数で表す．ベータ関数はガンマ関数で書ける (定理 5.5.3)．ガンマ関数の値を求めるには
(ア) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
(イ) 漸化式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ (定理 5.5.1) を繰り返し使って s が小さい場合に帰着．例えば $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$,　$\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{2^2}$
(ウ) 階乗または !! は慌てて掛け算を実行しない方がよい．なぜなら，後で約分するから．例えば例題 5.5.1 を見よ．

2.　適当な置換によりベータまたはガンマ関数に書き換える．ベータ関数とガンマ関数の定義が頭に入っていないと方針が立たない．
(1) $x^4 = t$ とおく．$4x^3dx = dt$ に合わせて式の残りの部分を後から決める．

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int_{x=0}^{x=1} \underbrace{\frac{1}{4x^2\sqrt{1-x^4}}}_{\text{後から決める}} \cdot \underline{4x^3dx} = \int_{t=0}^{t=1} \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\underline{dt}$$

$$= \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(2) $x = 2t$　　(3) $x^4 = t$　　(4) $x^2 = t$
(5) 積分の端点 $x = \pm 1$ で被積分関数が 0 になることより，ベータ関数と関係がありそうだと気づく．まず平行移動 $t = x + 1$ で $-1 \leq x \leq 1$ を $0 \leq t \leq 2$ に変換．次に $s = t/2$ とすると $0 \leq s \leq 1$ となる．被積分関数はもちろん s の多項式であり, $s = 0, 1$ で 0 になるのは間違いないが, その具体的な形は?
(6) $\sqrt{x} = t$ とおく．$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$ としてもよいが，$x^2 = t$ より $2xdx = dt$ とする方が楽であろう．

3.　「ガンマ関数で表せ」というだけなので，$\Gamma(4) = 6$ のように簡単な数値に直す必要はない．実際, それが不可能な問題ばかりである．(3) 以外はまずベータ関数で表してから定理 5.5.3 を使う．
(1) $x^5 = t$　(2) $x^b = t$.　　(3) $x = e^{-t}$　(4) $\dfrac{1}{1+x} = t$

4.
(1), (2) 例題 5.5.2 と定理 5.5.4
(3) $\sin\theta, \cos\theta$ で表して定理 5.5.2 (5)
(4) $x^4 = t$