大学入試問題 9 の (1) より $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-2}} = 1$ が直ちに従います.

また $x_{n-2} > x_{n-1} > x_n > 0$ より $\dfrac{1}{x_{n-2}} < \dfrac{1}{x_{n-1}} < \dfrac{1}{x_n}$ ですから

$$\frac{x_n}{x_{n-2}} < \frac{x_n}{x_{n-1}} < 1$$

となります. $n \to \infty$ とすると，はさみうちによって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = 1$$

この事実をテーマにしたのが次の問題です. 背景にはベータ関数というものがあります. 多項式のままでも計算できる (次の秋田県大の問題参照) のにわざわざ三角関数を持ち出すのは正統的とは言えませんが, よく知られた題材に結びつけたので受験生にとっては易しくなっているのかも知れません.

お茶の水女子大

0 以上の整数 n に対して $I(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} {}_n\mathrm{C}_k$ とおく．ただし，${}_0\mathrm{C}_0 = 1$ である.

(1) $I(0), I(1), I(2), I(3)$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) $(1-y^2)^n$ を二項定理を用いて展開することにより $I(n) = \displaystyle\int_0^1 (1-y^2)^n dy$ であることを示せ.

(3) $y = \sin x$ と置換することにより $\displaystyle\int_0^1 (1-y^2)^n dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx$ であることを示せ.

(4) $n \geqq 1$ のとき，$\dfrac{d}{dx}\left\{(\cos x)^{2n} \sin x\right\} = (2n+1)(\cos x)^{2n+1} - 2n(\cos x)^{2n-1}$ であることを示せ.

(5) $n \geqq 1$ に対して $I(n) < I(n-1)$ であること，および $\lim_{n\to\infty} \dfrac{I(n)}{I(n-1)} = 1$ であることを示せ.

解 (1) n 人から n 人を選ぶのですから, ${}_n\mathrm{C}_n = 1$ は当然です．さらに ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ という約束事があります．こう決めると ${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$ (n 人のチームから k

人の正選手を選ぶのと $n-k$ 人の補欠を選ぶのは同じ) という公式が $k=0$ のときも成り立ちます.

ところで ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ は $k=0$ でも成り立ちます. そうなるように $0! = 1$ と約束してあるからです.

お茶大の問題では親切に ${}_0\mathrm{C}_0 = 1$ という注意書きがあります. 結局, 初等的な計算により

$$I(0)=1, I(1)=\frac{2}{3}, I(2)=\frac{8}{15}, I(3)=\frac{16}{35}$$

(2) 二項定理 $(1+t)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, t^k$ に $t=-y^2$ を代入すると

$$(1-y^2)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (-y^2)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, {}_n\mathrm{C}_k\, y^{2k}$$

したがって

$$\int_0^1 (1-y^2)^n dy = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, {}_n\mathrm{C}_k\, y^{2k} dy$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_n\mathrm{C}_k \int_0^1 y^{2k} dy = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{2k+1} = I(n)$$

何となく $I(n) = \int_0^1 (1-y^2)dy$ から答案を書き始める人がいると思いますが, それは**とんでもない間違い**です. 「その式を示せ」という問題なのですから, **その式が正しいかどうかは始めはわからない**のです. 少なくとも, わからないふりをして証明を書かなければいけないのです. 証明は, 既に正しいとわかっていることから順に論理を積み上げげて, 最後に「 $I(n) = \int_0^1 (1-y^2)dy$ がようやく出ました」あるいは「 $\int_0^1 (1-y^2)dy = I(n)$ がようやく出ました」という感じで書くべきなのです. これから証明したい事と証明済みの事はきっちり区別しましょう (大学入試問題 17 (3) の検算も参照してください).

例えば答案の冒頭に「 $I(n) = \int_0^1 (1-y^2)dy$ を示そう」[*] と書くのであれば, 証明したい事と証明済みの事の区別がついています. でも, それはただ問題文を書き写したにすぎないので, 1 点ももらえないでしょう. 空疎なことを何となく書くのはやめましょう.

[*]下線部がないと, 「... である」と主張することになります. そう主張するのは証明の最後のはずです. 証明の冒頭で主張するのは早すぎます.

(3) $y=\sin x\,(0 \leqq x \leqq \pi/2)$ とすると $dy=\cos x dx$ なので

$$\int_{y=0}^{y=1}(1-y^2)^n\,\underline{dy} = \int_{x=0}^{x=\pi/2}(1-\sin^2 x)^n\,\underline{\cos x dx}$$
$$= \int_0^{\pi/2}(\cos^2 x)^n\cos x dx = \int_0^{\pi/2}(\cos x)^{2n+1}dx$$

(4) 帰納法はいりません．ただ微分するだけです．$y=t^{2n}$ に $t=\cos x$ を代入したものが $y=(\cos x)^{2n}$ です． $\dfrac{dy}{dt}=2nt^{2n-1}=2n(\cos x)^{2n-1}$, $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$ なので合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dx}\bigl\{(\cos x)^{2n}\bigr\} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -2n(\cos x)^{2n-1}\sin x$$

したがって，積の微分法より

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\bigl\{(\cos x)^{2n}\sin x\bigr\} = \frac{d}{dx}\bigl\{(\cos x)^{2n}\bigr\}\cdot\sin x + (\cos x)^{2n}\cdot\frac{d}{dx}\sin x\\
&= -2n(\cos x)^{2n-1}\sin^2 x + (\cos x)^{2n+1}\\
&= -2n(\cos x)^{2n-1}(1-\cos^2 x) + (\cos x)^{2n+1}\\
&= (2n+1)(\cos x)^{2n+1} - 2n(\cos x)^{2n-1}
\end{aligned}$$

問題文では $n \geqq 1$ のときとなっていますが，$n=0$ でも成り立ちます．
(5) $0<y<1$ では $0<1-y^2<1$ なので $(1-y^2)^n<(1-y^2)^{n-1}$．よって $I(n)<I(n-1)$.

さて (4) より

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2}\frac{d}{dx}\bigl\{(\cos x)^{2n}\sin x\bigr\}dx\\
&= (2n+1)\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{2n+1}dx - 2n\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{2n-1}dx
\end{aligned}$$

そして

$$\text{左辺} = \Bigl[(\cos x)^{2n}\sin x\Bigr]_0^{\pi/2} = 0, \quad \text{右辺} = (2n+1)I(n) - 2nI(n-1)$$

なので $(2n+1)I(n)=2nI(n-1)$．したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I(n)}{I(n-1)} = \frac{2n}{2n+1} \to 1\,(n\to\infty)$$

秋田県大

n が 0 以上の整数のとき，$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ について考える.
(1) I_0, I_1 を求めよ.
(2) n が 1 以上のとき， I_n を I_{n-1} を用いて表せ.
(3) (2) の結果を用いて I_3 と I_4 を求めよ.
(4) I_n を n を用いて表せ.

解 (1) $I_0 = 1, I_1 = \dfrac{2}{3}$
(2) 大学入試問題 17(p.138) や $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ を求める計算 (p.187) と同様に部分積分します.

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 x'(1-x^2)^n dx \\
&= [x(1-x^2)^n]_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(1-x^2)^{n-1}(-2x)dx \\
&= 2n \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx
\end{aligned}
$$

となります． x^2 から $1-x^2$ を作ろうと考えて

$$
\begin{aligned}
2nI_{n-1} - I_n &= 2n\int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1}dx \\
&= 2n\int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2nI_n
\end{aligned}
$$

したがって $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ となります.
(3) $I_2 = \dfrac{4}{5}I_1 = \dfrac{8}{15}, I_3 = \dfrac{6}{7}I_2 = \dfrac{16}{35}, I_4 = \dfrac{8}{9}I_3 = \dfrac{128}{315}$
(4) $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$， $I_{n-1} = \dfrac{2n-2}{2n-1}I_{n-2}$， $I_{n-2} = \dfrac{2n-4}{2n-3}I_{n-3}, \cdots,$
$I_2 = \dfrac{4}{5}I_1$， $I_1 = \dfrac{2}{3}I_0$， $I_0 = 1$ なので，順に代入して

$$
I_n = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}
$$

記号 !! と最後の等号については大学入試問題 9 の注を参照してください.

$B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ をベータ関数といって多くの公式が知られています. B は β の大文字です. ベータ関数は a,b の **2 変数**関数です.

$(1-x^2)^n$ は偶関数なので $I_n=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$ が成り立ち, $x=2t-1$ と置換すると $dx=2dt$ より

$$I_n=\frac{1}{2}\int_{x=-1}^{x=1}(1-x^2)^n dx=\int_{t=0}^{t=1}4^n t^n(1-t)^n dt=4^n B(n+1,n+1)$$

が成り立ちます. したがって, 秋田県大の問題, お茶大の問題, 大学入試問題 9 の全ての背景にはベータ関数があるのです. ベータ関数は大学レベルの微分積分の教科書の多くに載っています. 例えば三宅敏恒「入門微分積分」(培風館) に載っていて, その練習問題の解答の一部 (私が勝手に作成したもの) は `http://sci-tech.kwansei.ac.jp/~yamane` に置いてあります.

もちろん入試問題はベータ関数を知らなくても解けるように作ってあります. しかし, 高校数学がばらばらな知識の寄せ集めになってしまうのが嫌なので, ベータ関数の話をしました. 高校生のみなさんにも, できれば高校・大学の枠を気にせずに進んだ勉強をしていただきたいと思います.