九州大学の問題を解説しましょう．大学入試問題 2(高知大学) によく似ていますが, 少し難しいです.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

が任意の実数 x に対して成り立つことを大学 1 年くらいで習います．うまく工夫すれば, 高校数学だけを使ってこの式を (x の特定の値に対して) 証明することができます．高知大は $x=1$ の場合, 九大は $x=-2$ の場合です.

> $n=0,1,2,\cdots$ に対して
>
> $$I_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx$$
>
> とおく．ただし，$0!=1$ とする．
> (1) I_0 の値を求め, $n=1,2,\cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ．また，これらを用いて I_3 の値を求めよ.
> (2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して, 次の不等式を示せ.
>
> $$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad(n=1,2,\cdots)$$
>
> (3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,2^k}{k!}$ を求めよ.

解 (1) $I_0=\displaystyle\int_0^2 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^2=e^2-1$

部分積分により $n\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n(e^x)'dx=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{\Big[x^ne^x\Big]_0^2-\int_0^2(x^n)'e^x dx\right\}\\&=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{2^ne^2-n\int_0^2 x^{n-1}e^x dx\right\}=e^2\frac{(-1)^n2^n}{n!}+I_{n-1}\end{aligned}$$

後のことを考えると，階差の形で書くと便利です．すなわち

$$I_n-I_{n-1}=e^2\frac{(-1)^n2^n}{n!}\quad(n=1,2,\cdots)$$

したがって

$$I_3 = I_0 + \sum_{n=1}^{3}(I_n - I_{n-1}) = e^2 - 1 + e^2 \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$$
$$= e^2 - 1 + e^2\left(\frac{-2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{-2^3}{3!}\right) = -\frac{1}{3}e^2 - 1$$

(2) $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx \leqq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 e^2 x^n dx = e^2 \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ ですから後は $\dfrac{2^n}{(n+1)!} \leqq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ を示せば証明が終わります．ところが

$$\frac{2^n}{(n+1)!} \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \iff 2\cdot 3^{n-1} \leqq (n+1)!$$

なので結局 $2\cdot 3^{n-1} \leqq (n+1)!$ を示せばいいことになります．この不等式は $n=1$ のときは明らかに成り立ち, また，$n \geqq 2$ のときは

$$(n+1)! = \underbrace{(n+1)n(n-1)\cdots 3}_{n-1\text{ 個}}\cdot 2\cdot 1 \geqq 2\cdot 3^{n-1}$$

によって示されます.

(3) (1) によれば $\dfrac{(-1)^k 2^k}{k!} = \dfrac{1}{e^2}(I_k - I_{k-1})\ (k = 1, 2, \cdots)$ なので

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e^2}(I_k - I_{k-1})$$
$$= \frac{1}{e^2}(I_n - I_0) = \frac{1}{e^2}I_n - 1 + \frac{1}{e^2}$$

$k=0$ に対応する項 $(-1)^0 2^0/0! = 1$ を加えて

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2}I_n + \frac{1}{e^2}$$

ところで (2) は $0 \leqq |I_n| \leqq (\text{定数})\cdot(2/3)^{n-1}$ を示しているので, はさみうちによって $I_n \to 0$ です．したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2}(= e^{-2})$ ■