大学入試問題 17 といくつかの問題を, 数式処理電卓 Voyage 200 を使って解説します. Voyage 200 の機能の一端が分かります. TI-89 Titanium でも同様のことができます.

Voyage 200 で微分の計算ができます. 下の図版で ln は自然対数 $\log_e$ のことです (Voyage では数学ではなく物理や化学の習慣に従って log は常用対数 $\log_{10}$ を表すことになっています).

本稿では地の文では log は自然対数を表すことにします.

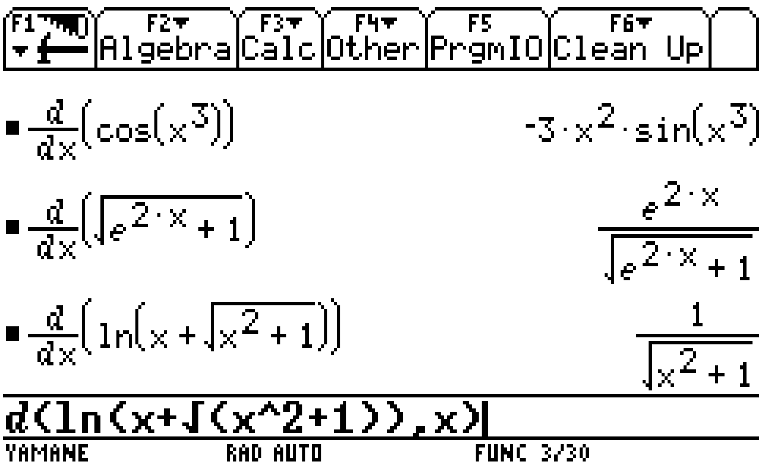

図 1

面倒な計算も簡単にやってくれます.

計算は手でもできないといけませんが (そうでないと理解が浅くなって，そのうちボロが出る) Voyage を検算に使うのはぜひお勧めしたいことです.

やろうと思えば手でできるものでも，計算量が膨大になると実際にはやる気が起きないことがあります. そういうときこそテクノロジーを活用しましょう.

例としてここで考えたいのは $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の高次導関数について調べるという問題です. 商の微分法を使えば

$$f'(x) = \frac{(\log x)' \cdot x - \log x \cdot x'}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

となります. 第 2 次導関数もやはり商の微分法で求められますが，$f'(x) = x^{-2}(1 - \log x)$ と思って積の微分法を使う方が計算が楽で

$$f''(x) = -2x^{-3}(1 - \log x) + x^{-2} \cdot (-x^{-1}) = x^{-3}(-3 + 2\log x)$$

となります. これを延々と手で続けるのは気が滅入るので Voyage を使うと図 2 のようになります. ans(1) というのは 1 つ前の計算結果という意味で繰り返して同じ計算をするとき (今の場合は微分) には大変便利です.

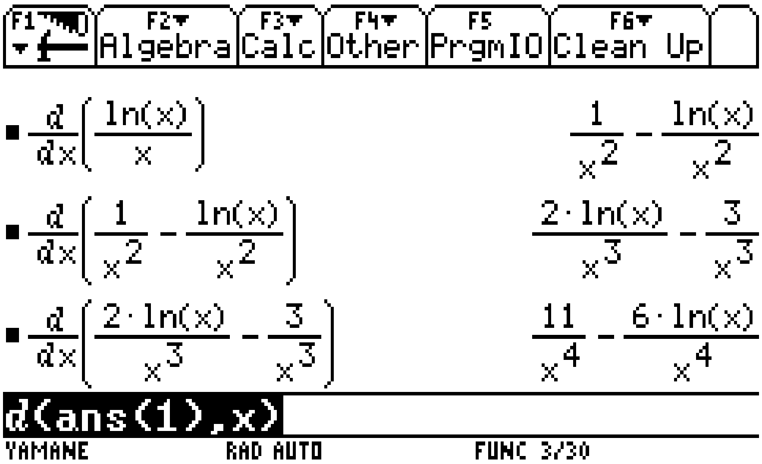

図 2

この計算を繰り返すと次の予想を立てることができます.

予想 1: $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$ (a_n, b_n は定数) $\cdots\cdots\cdots(*)_n$
が任意の自然数 n に対して成り立つ.

確かに $(*)_1$ は $a_1 = 1, b_1 = -1$ で成り立ちます. そしてもし $(*)_n$ が成り立つならば

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \Big\{x^{-(n+1)}(a_n + b_n \log x)\Big\}' \\ &= -(n+1)x^{-(n+2)}(a_n + b_n \log x) + x^{-(n+1)} \cdot b_n x^{-1} \\ &= x^{-(n+2)}\Big\{-(n+1)a_n + b_n - (n+1)b_n \log x\Big\} \end{aligned}$$

なので

$$a_{n+1} = -(n+1)a_n + b_n, \quad b_{n+1} = -(n+1)b_n$$

とおけば $(*)_{n+1}$ が成り立ちます. これで帰納法が進んで予想が正しいことが証明できました. $b_n = (-1)^n n!$ も分かります.

今度は $g(x) = x^2 e^x$ の高次導関数について調べましょう.

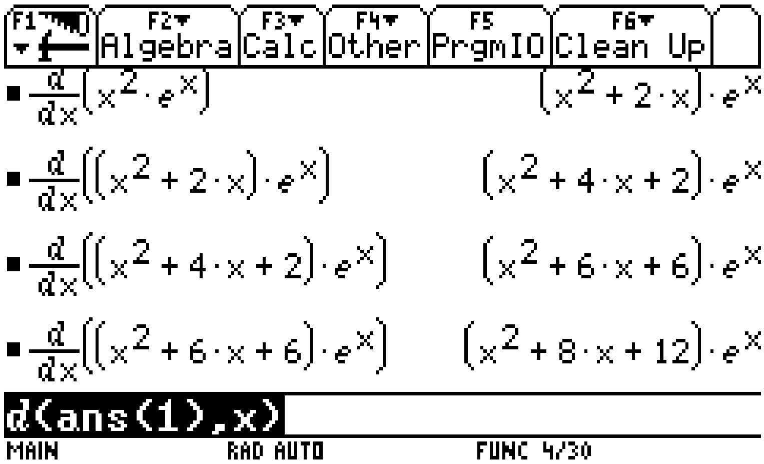

図 3

この計算を続けると

$$
\begin{aligned}
g^{(5)}(x) &= (x^2+10x+20)e^x \\
g^{(6)}(x) &= (x^2+12x+30)e^x \\
g^{(7)}(x) &= (x^2+14x+42)e^x \\
g^{(8)}(x) &= (x^2+16x+56)e^x
\end{aligned}
$$

であることが分かります．$n=1,2,\ldots,8$ を見る限り $g^{(n)}(x)$ は e^x と $(x^2+2nx+a_n)e^x$ (a_n は定数) という形をしていて $\{a_n\}$ は

$$0,2,6,12,20,30,42,56,\ldots$$

となっています．その一般項はすぐには分かりませんが, 階差数列 $\{b_n\}$ は

$$2,4,6,8,10,12,14,\ldots$$

なので $b_n=2n$，したがって

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = n(n-1)$$

が少なくとも $n \leqq 8$ では成り立っています．

この実験結果より

予想 2: $g^{(n)}(x) = \left\{x^2+2nx+n(n-1)\right\}e^x \quad (n \geqq 1)$ ………$(\sharp)_n$
が任意の自然数 n に対して成り立つ．

という予想が立てられます．

帰納法で証明しましょう．まず $(\sharp)_1$ は成り立っています (実は $(\sharp)_8$ まで確認済み).

次にもし $(\sharp)_n$ が正しければ

$$
\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= \bigl\{x^2+2nx+n(n-1)\bigr\}'e^x + \bigl\{x^2+2nx+n(n-1)\bigr\}e^x \\
&= \bigl\{2x+2n\bigr\}e^x + \bigl\{x^2+2nx+n(n-1)\bigr\}e^x \\
&= \bigl\{x^2+2(n+1)x+(n+1)n\bigr\}e^x
\end{aligned}
$$

となるので $(\sharp)_{n+1}$ も成り立ちます.

したがって帰納法が進み, $(\sharp)_n$ は任意の n について成り立つことが分かります.

Voyage 200 で積分の計算ができます. $\displaystyle\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$ のような文字を含む計算もできます. 不定積分の場合は積分定数が省略されます.

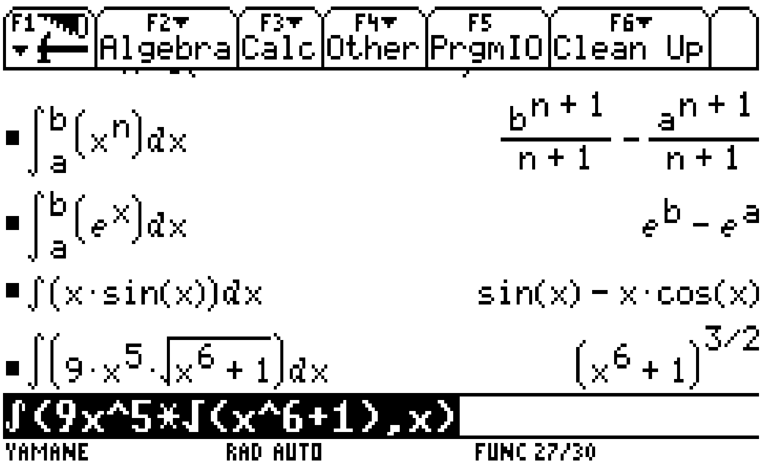

図 4

「逆引き微分積分」の大学入試問題 17 に現れる, $\sqrt{x^2+1}$ を含む積分について考えましょう. $t = x + \sqrt{x^2+1}$ と置換するという定石 (大学 1 年程度) がありますが, その方法で $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ を求めるなどというのは, 手計算でできないことはないけれど, 気の重い仕事です. Voyage に任せてみましょう.

5/2 乗分の 1 に限らず, よく似た積分を手当たり次第に Voyage で計算してみました. つまり $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$ $(n \geqq 1)$ を求めました (図 5).

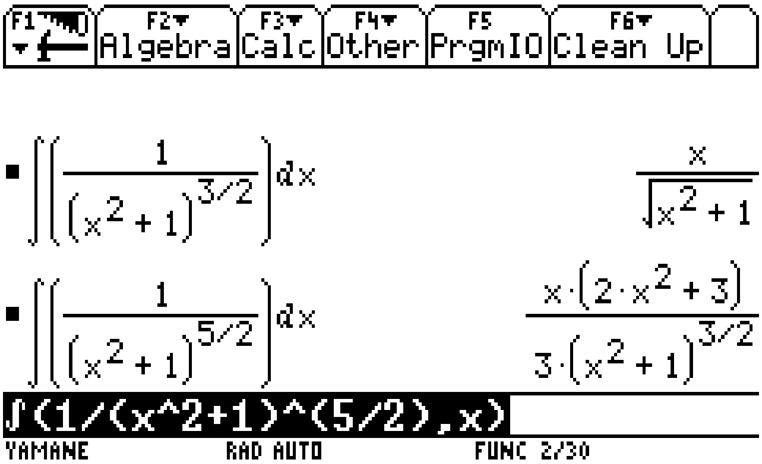

図 5

続き ($n = 3, 4, 5, \ldots, 10$) は以下のような結果になりました (積分定数は省略).

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{7}{2}}} &= \frac{8x^5+20x^3+15x}{15(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} \\
\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{9}{2}}} &= \frac{16x^7+56x^5+70x^3+35x}{35(x^2+1)^{\frac{7}{2}}} \\
\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{11}{2}}} &= \frac{128x^9+576x^7+1008x^5+840x^3+315x}{315(x^2+1)^{\frac{9}{2}}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{21}{2}}} &= \frac{65536x^{19}+622592x^{17}+\cdots}{230945(x^2+1)^{\frac{19}{2}}}
\end{aligned}
$$

計算を数分待ってもいいのなら $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{101}{2}}}$ も分かりますが，係数が何十桁にもなるのでここに結果を書くのは止めます．以上の実験結果を見て規則性に気づきました．一般に次のようになっていると予想されます (実際, $1 \leqq n \leqq 50$ では確かにそうなっています).

$$
\text{予想 3:} \quad \begin{cases} \bullet \quad \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(2n-1)\text{ 次式}}{(x^2+1)^{n-\frac{1}{2}}} \\ \bullet \quad \text{分子の } (2n-1) \text{ 次式は奇数次の項のみからなる} \end{cases}
$$

予想 3 が任意の自然数 n に対して成り立つことを証明するにはどうすればいいでしょう.

まず，上の話では省略されていますが, 本当は積分定数があって，計算のじゃまになります．そこでその心配をなくすために

$$
f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}, \quad n \geqq 0
$$

とおきましょう．これなら $f_n'(x) = \dfrac{1}{(t^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$ かつ $f_n(0) = 0$ となります．任意定数を含みません．ここで $n = 0$ を含めていることが後で効きます．

$$g_n(x) = (x^2+1)^{n-\frac{1}{2}} f_n(x), \quad n \geqq 1 > 0$$

とおくとき予想 3 は

予想 4: $g_n(x)$ は $2n-1$ 次式で奇数次の項のみからなる

に言い換えられます．

予想 3,4 の証明には漸化式を使うといいでしょう．積分で定義される数列 (関数列) の漸化式を導くには部分積分が役立つことがよくあります．そこで

$$f_n(x) = \int_0^x t' \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{n+\frac{1}{2}}} dt$$

と思って部分積分しましょう．

$$\left\{(1+t^2)^{-(n+\frac{1}{2})}\right\}' = -\left(n+\frac{1}{2}\right)(1+t^2)^{-\left(n+\frac{3}{2}\right)} \cdot 2t$$

なので

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x}{(1+x^2)^{n+1/2}} + (2n+1)\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+3/2}} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^{n+1/2}} + (2n+1)\Big\{f_n(x) - f_{n+1}(x)\Big\} \end{aligned}$$

したがって $\{f_n(x)\}$ の満たす次の漸化式ができます．

$$f_{n+1}(x) = \frac{2n}{2n+1} f_n(x) + \frac{1}{2n+1} \frac{x}{(1+x^2)^{n+1/2}} \quad (n \geqq 0)$$

$n = 0$ を代入すると

$$f_1(x) = 0 \cdot f_0(x) + \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$

となって $f_0(x)$ が分からなくても $f_1(x)$ が分かります．そこで $f_1(x)$ を初項として考えを進めましょう (ついでながら $f_0(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ です)．

$g_1(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} f_1(x) = x$ で $g_1(x)$ は確かに奇数次の項からなる整式で次数は $2 \cdot 1 - 1$ です．

次に漸化式の両辺に $(1+x^2)^{(n+1)-\frac{1}{2}} = (1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ を掛けると $g_n(x)$ の漸化式

$$g_{n+1}(x) = \frac{2n}{2n+1}(1+x^2) g_n(x) + \frac{x}{2n+1}$$

が導かれます．まず $g_1(x) = x$ です．そして，もし $g_n(x)$ が奇数次の項のみからなる $(2n-1)$ 次式ならば $g_{n+1}(x)$ は奇数次の項のみからなる整式で, 次数は $(2n-1)+2 = 2(n+1)-1$ になります．これで数学的帰納法が進み, 予想 4 が任意の自然数 n について成り立つことが分かります．同時に予想 3 の証明も終わります．

ところで $f_n(x)$ を求めるには $g_n(x)$ を求めればいいことになります．漸化式は容易にプログラムに書き換えられます．例えば図 6 のプログラムを実行すれば $g_{30}(x)$ を求められます．漸化式の左辺が $g_{n+1}(x)$ なので $n = 29$ までのループで $g_{30}(x)$ が得られます．

TI の電卓の言語は BASIC に似ていますが, 数値計算だけでなく数式処理ができる (微分積分を含む) 点が通常の BASIC よりすぐれています．もちろん係数だけを取り出して整式の代わりに配列を扱ってもいいと思いますが, ここでは深入りしません．

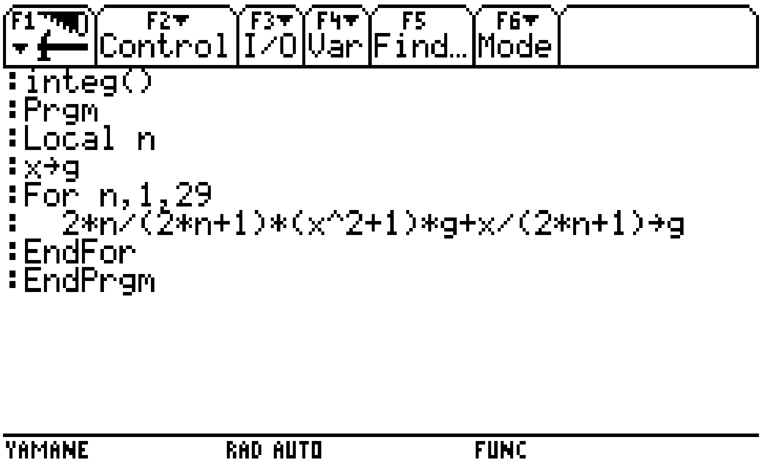

図 6