関学のリサージュ図形の問題 (大学入試問題 10) の補足をします.

S_n の $n \to \infty$ のときの極限値を求めましょう. 「ほとんど定数」の方法を使います.

$$S_n = \int_0^{\pi/2} |\sin 2nt| \cos t dt$$

について調べます. $u = |\sin 2nt|$ は周期 $\dfrac{\pi}{2n}$ です (絶対値がついているので周期が $\sin 2nt$ の半分). そこで周期を

$$d = \frac{\pi}{2n}$$

とおきます. $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ を d ずつの幅に n 等分して

$$I_k = \{t | (k-1)d \leq t \leq kd\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

とおきます. n が大きいとき d は小さくて I_k 上 $\cos t$ はほとんど定数になります. より詳しく述べると

$$I_k\text{上で} \qquad \cos kd \leq \cos t \leq \cos\big\{(k-1)d\big\} \qquad \cdots\cdots①$$

また, 周期性と置換 $2nt = p$ より

$$\int_{I_k} |\sin 2nt| dt = \int_{I_1} |\sin 2nt| dt = \int_0^d \sin 2nt dt$$
$$= \int_0^{\pi} \sin p \cdot \frac{dp}{2n} = \frac{1}{2n}\Big[-\cos p\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n} \qquad \cdots\cdots②$$

そこで ① の各辺に $|\sin 2nt|$ を掛けてから I_k 上で積分すると②より

$$\frac{\cos kd}{n} \leq \int_{I_k} |\sin 2nt| \cos t dt \leq \frac{\cos\{(k-1)d\}}{n}$$

k に関して和を取れば (このとき n は固定したままで定数扱い)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos kd \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} |\sin 2nt| \cos t dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\{(k-1)d\} \qquad \cdots\cdots③$$

$d=\dfrac{\pi}{2n}$ より $n\to\infty$ のとき区分求積法によって $(0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}$ を n 等分する)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos kd=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos k\frac{\pi}{2n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t dt=\frac{2}{\pi}$$

となります．同様に

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\{(k-1)d\}\to\frac{2}{\pi}$$

したがって③ではさみうちすると

$$S_n\to\frac{2}{\pi}\quad(n\to\infty)$$

念のために機械を使って検算しましょう．Voyage 200 の数値積分のコマンド nInt で $S_{10}-\dfrac{2}{\pi}$ の近似値を求めると 0.00028275919 となりました．n がうんと大きい場合を Voyage で計算すると何分も待たされるので, PC 用の数式処理ソフト Maple を使って計算したところ $S_{100}-\dfrac{2}{\pi}\risingdotseq 0.28260645\times10^{-5}$, $S_{1000}-\dfrac{2}{\pi}\risingdotseq 0.308600\times10^{-7}$ となりました．これくらい合えば安心できます．Voyage や Maple 等が手元にない場合は十進 Basic で数値積分の計算をするといいでしょう．