$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (例題 23) の別証明です.

$a_n = \sqrt[n]{n} - 1\,(n \geq 3)$ とおいて $a_n \to 0$ を示しましょう.

まず $a_n > 0$ は明らかです. また, $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ です. 両辺を n 乗して二項定理を使うと

$$n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \cdots > 1 + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

したがって

$$0 < a_n^2 < \frac{2}{n}.$$

$n \to \infty$ としてはさみうちを使うと $a_n^2 \to 0$.

この証明は短いけれども, 他の話と結びつきにくいので, 本文では $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ に基づいた証明を採用しました.