対数を含む積分 (東京理科大)

次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{\log x}{(x+1)^2}dx$$

解 上級者向けの問題です. **なかなか手が動かないのが普通でしょう. そういうときは, 似た問題を思い出します.** 対数を含んだ積分でもっとも基本的なのはもちろん $\int \log x dx$ です. これは (『逆引き微分積分』では別解としていますが) 部分積分によって

$$\int \log x dx = \int x' \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C$$

もう少し高級になると, n が自然数のとき, やはり部分積分によって

$$\int x^n \log x dx = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \log x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

これらを真似ようと考えます.

次のように部分積分を使って計算します.

$$\int \frac{\log x}{(x+1)^2}dx = \int \left(\frac{-1}{x+1}\right)' \log x dx = \left(\frac{-1}{x+1}\right) \cdot \log x - \int \left(\frac{-1}{x+1}\right) \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{-\log x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx$$

対数は消えて後は分数式を積分すれば完成です. 部分分数分解により

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \log x - \log(x+1) + C$$

ですから*結局

$$\int \frac{\log x}{(x+1)^2}dx = \frac{-\log x}{x+1} + \log x - \log(x+1) + C$$

*問題文に $\log x$ が現れるので真数条件より $x > 0$ であり, $\log|x| - \log|x+1| + C$ とする必要はありません.

この問題が解けなくても大して困らないような気もしますが, 前ページで太字で書いたことを教訓としてよく覚えておいて欲しいので, 解説することにしました．つまり，次の教訓です．

初めて見る問題に出くわすことは当然ありうる．
そのときは, 知っている基本問題を思い出して，その解法を応用する．

なお上の問題で $x=e^t$ と置くと $\displaystyle\int t\cdot\frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt$ となります．こうした場合は, t 倍がじゃまなので，基本問題 $\int te^t dt$ を部分積分で解いたことを思い出します．

$$\frac{e^t}{(e^t+1)^2}=\left(\frac{1}{e^t+1}\right)' \quad [e^t+1=s \text{ と置換}]$$

を使えば部分積分できます．しかしこの問題について言えば，指数関数への置換は勧めません．もし置換してしまっても何とかなるということを指摘したかっただけです．

三角関数の分数式 (埼玉大)

$\tan\dfrac{x}{2}$ を t とおき，次の問いに答えよ．
(1) $\sin x$ および $\cos x$ を t で表せ．
(2) $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．
(3) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{5}{3\sin x+4\cos x}dx$ を求めよ．

解 例題60の直前 (p.164) に書いたことがヒント付で出題されたのです．(1)(2) はそこで説明済みです．(3) は (♯) を使います．すなわち

(1) $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$

(3) $3\sin x+4\cos x=3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+4\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{-2(2t^2-3t-2)}{1+t^2}$ なので (♯) に

より

$$\int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x}dx = \int \frac{5(1+t^2)}{-2(2t^2-3t-2)} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{-5}{(2t+1)(t-2)}dt$$

ここで部分分数分解が必要になります.

$$\frac{a}{2t+1} + \frac{b}{t-2} = \frac{-5}{(2t+1)(t-2)}$$

と置いて分母をはらうと $a+2b=0,\ -2a+b=-5$ で $a=2,\ b=-1$ なので

$$\int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x}dx = \int \left(\frac{2}{2t+1} + \frac{-1}{t-2}\right)dt$$
$$= \log|2t+1| - \log|t-2| + C = \log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-2}\right| + C$$

$\dfrac{1}{1+t^2}$ の積分 (山口大)

関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ について
(1) $t = \tan\theta$ とおいて, $f(1)$ の値を求めよ.
(2) $u = \dfrac{2t-1}{t+2}$ とおいて, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+u^2}du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ が成り立つことを示し, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の値を求めよ.

解 arctan (第 11 章) を使わずに説明してもモヤモヤが残るだけです. arctan を表に出して解きましょう. $f(x) = \arctan x$ です.
(1) $f(1) = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$
(2) $u = \dfrac{2(t+2)-5}{t+2} = 2 + \dfrac{-5}{t+2}$ と変形すれば計算が楽で,

$$du = \frac{5}{(t+2)^2}dt$$

であり，また，t が $\dfrac{1}{2}$ から 1 まで増加するとき u は 0 から $\dfrac{1}{3}$ まで増加します．また

$$1+u^2 = 1+\left(\frac{2t-1}{t+2}\right)^2 = \frac{5(t^2+1)}{(t+2)^2}$$

なので

$$\int_{u=0}^{u=\frac{1}{3}} \frac{1}{1+u^2}du = \int_{t=\frac{1}{2}}^{t=1} \frac{(t+2)^2}{5(t^2+1)} \cdot \frac{5}{(t+2)^2}dt = \int_{t=\frac{1}{2}}^{t=1} \frac{1}{1+t^2}dt$$

これで $f(1/3) = f(1) - f(1/2)$ が示されたので

$$f(1/2) + f(1/3) = f(1) = \pi/4$$

(2) では $\arctan 1/2 + \arctan 1/3 = \arctan 1$ を証明させたわけです．つまり $\tan\alpha = 1/2, \tan\beta = 1/3$ で α, β が鋭角とすると $\tan(\alpha+\beta) = 1$ であることを示させたのです．ところがこれは加法定理からも証明できます．すなわち

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1/2+1/3}{1-1/6} = 1$$

です．たぶん山口大の人はこの式を手がかりにして本問を作ったのでしょう．

(2) で指示された置換は何かというと

$$u = \frac{t-\dfrac{1}{2}}{1+t\cdot\dfrac{1}{2}} = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha} = \tan(\theta-\alpha)$$

つまり $\arctan u = \theta - \alpha = \arctan t - \alpha$ です．上で示したように $u = 1/3$ のとき $t = 1$ です．

$\sqrt{a^2-x^2}$ を含む積分 (関西学院大)

xy 平面上に曲線 C : $y=\dfrac{x^2+3}{3}\sqrt{9-x^2}\,(-3\leqq x\leqq 3)$ がある.
(1) y の増減を調べ, C の概形をかけ．ただし，凹凸, 変曲点は調べなくてよい.
(2) C と x 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ.

解 (1) まず微分する前に, $x^2+3>0,\quad \sqrt{9-x^2}\geqq 0$ (等号成立は $x=\pm 3$) なので

$$y\geqq 0\,(\text{等号成立は}\,x=\pm 3)\qquad\qquad \cdots\cdots(*)$$

が分かります. (2) の準備はこれで十分です.

さて増減を調べましょう．偶関数なので $0\leqq x\leqq 3$ で調べれば十分です.

まず $z=\sqrt{9-x^2}$ とおいて，これを微分しておきましょう. $z=\sqrt{t}=t^{1/2}$ に $t=9-x^2$ を代入したものです.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}},\quad \frac{dt}{dx}=-2x$$

なので，合成関数の微分法により，これらを掛け合わせて

$$(\sqrt{9-x^2})'=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

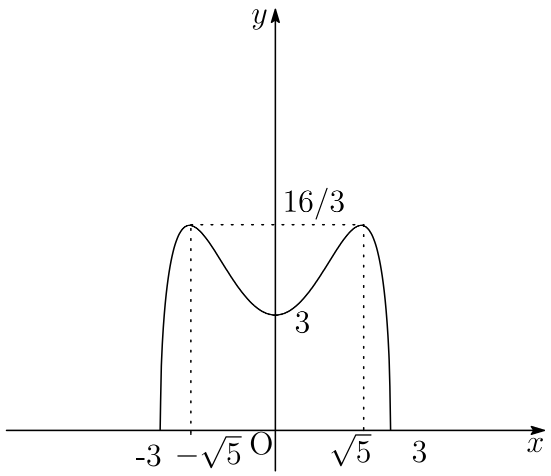
このことを踏まえて, 積の微分法より

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\Big(\frac{x^2+3}{3}\Big)'\sqrt{9-x^2}+\frac{x^2+3}{3}\big(\sqrt{9-x^2}\,\big)'\\&=\frac{2x}{3}\sqrt{9-x^2}+\frac{x^2+3}{3}\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{x(5-x^2)}{\sqrt{9-x^2}}\end{aligned}$$

よって $0\leqq x\leqq\sqrt{5}(<3)$ で単調増加, $\sqrt{5}\leqq x\leqq 3$ で単調減少です．($x=0$ で $y'=0$)

$-3\leqq x\leqq 3$ で考えると, $x=\pm\sqrt{5}$ における極大値は $\dfrac{16}{3}$, $x=0$ における極小値は 3 です. $\displaystyle\lim_{x\to\pm 3}y'=\mp\infty$(複号同順) も加味して

x	-3	$\cdots$	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$	3
y'	∞	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	$16/3$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$16/3$	$\searrow$	0



(2) 求める面積を S とします．(∗) より $S=\int_{-3}^{3} y dx$ です．

$$I=\int_0^3 \frac{x^2}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx,\quad J=\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$$

とおくと偶関数の性質より $S=2\Big(I+J\Big)$ が成り立ちます．J は 4 分円の面積に他ならないから簡単で

$$J=\frac{9\pi}{4}$$

次に I を求めるには第 7 章と第 5 章の定石を順に使います．まず $x=3\sin\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi/2)$ と置換します．$dx=3\cos\theta d\theta$ と $\sqrt{9-x^2}=3\cos\theta$ より

$$I=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\frac{1}{3}(3\sin\theta)^2\cdot 3\cos\theta\cdot\underline{3\cos\theta d\theta}=3^3\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$$

ここで $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ より $\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{1}{2^2}\sin^2 2\theta=\dfrac{1}{2^3}(1-\cos 4\theta)$ なので (次数を下げる定石に従いました)

$$I=\frac{3^3}{2^3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)d\theta=\frac{3^3}{2^3}\Big[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\pi/2}=\frac{3^3}{2^4}\pi$$

以上より

$$S=\frac{63}{8}\pi$$