『明解複素解析』p.62 積分路の変形について

p.45 と同じ議論を，念のため p.62 の記号を使って書き直す.

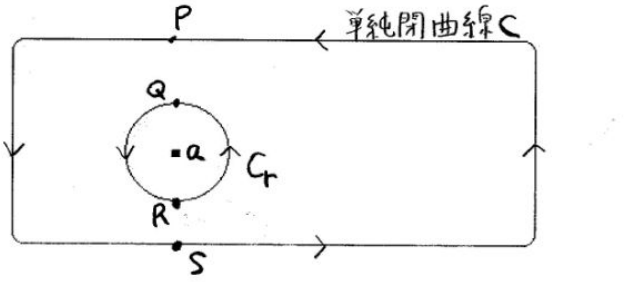

図1

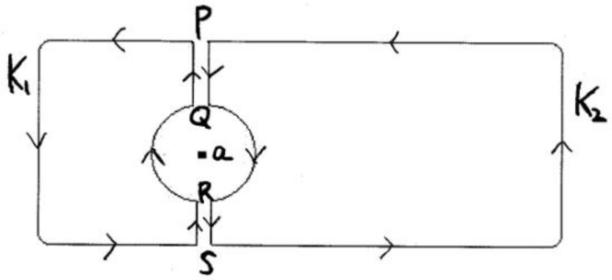

図2

C はぐにゃぐにゃのヘンテコな曲線でもかまわないが, 説明を簡単にするため, 上の図で考える．図 1 のように C 上に点 P,S をとり, C_r 上に点 Q,R をとる．P と Q, R と S を線分で結んで図のように単純閉曲線 K_1, K_2 を作る．もちろん，どちらも逆時計回りの向きをつける．K_1, K_2 は 線分 PQ のところで重なるのだが, 見やすくするために図 2 ではずらして描いた．本当は重なっていることをくれぐれも忘れないでいただきたい．線分 RS についても同様である．

ところで PQ は K_1 の一部と思えば上向きで (だから QP という方が適切), K_2 の一部と思えば下向きである．同様に，RS も K_1 の一部と思えば上向きで (だから SR という方が適切), K_2 の一部と思えば下向きである．そして

$$\int_{\mathrm{QP}} \frac{f(z)}{z-a}dz + \int_{\mathrm{PQ}} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0,\ \int_{\mathrm{SR}} \frac{f(z)}{z-a}dz + \int_{\mathrm{RS}} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

K_1, K_2 はともに円 C_r の一部を含む．しかし，向きが今は時計回り．

以上のことを合わせると

$$\int_{K_1} \frac{f(z)}{z-a}dz + \int_{K_2} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{1}$$

$\frac{f(z)}{z-a}$ は D から a を除いたところで正則なので, コーシーの積分定理より

$$\int_{K_j} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0\,(j=1,2) \tag{2}$$

(1) と (2) より

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

後は左辺第 2 項を移項すればよい.