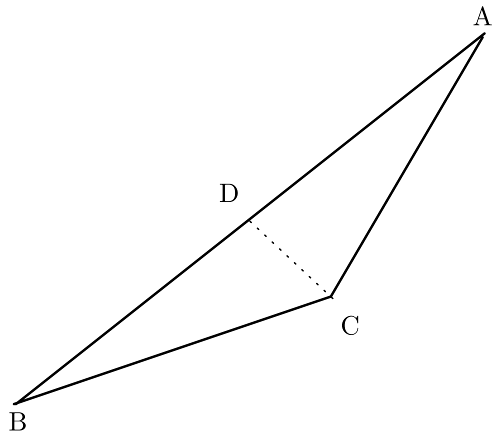
p.61 3つの補足

補足その１ 「必要ならば 2 つに分け, それぞれに」

p.61 の 7 行目から 9 行目にかけて「(必要ならば 2 つに分け, それぞれに) 外接する図のような長方形...」 という記述がある. 必要ならば 2 つに分けるというのは下図の実線の三角形 △ABC のような場合を念頭においている. この場合, 辺が x 軸または y 軸に平行な長方形であって 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ が周上にあるものは存在しない. そこで下図のように点線によって 2 つの 3 角形に分ければ, p.61 の図のようにして適当な長方形を構成できる.



△ADC の向きに従えば線分 DC には D が始点で C が終点となるように向きがついている. しかし △BCD の向きに従えば, この線分には逆の向きがつく. つまり CD である. したがって $\int_{\mathrm{DC}} = -\int_{\mathrm{CD}}$ より

$$\begin{aligned}
&\int_{\triangle\mathrm{ADC}} f(z)dz + \int_{\triangle\mathrm{BCD}} f(z)dz \\
&= \int_{\mathrm{AD}} + \int_{\mathrm{DC}} + \int_{\mathrm{CA}} + \int_{\mathrm{BC}} + \int_{\mathrm{CD}} + \int_{\mathrm{DB}} \\
&= \int_{\mathrm{AD}} + \int_{\mathrm{DB}} + \int_{\mathrm{BC}} + \int_{\mathrm{CA}} \\
&= \int_{\triangle\mathrm{ABC}} f(z)dz
\end{aligned}$$

ゆえに $\int_{\triangle\mathrm{ADC}} f(z)dz = \int_{\triangle\mathrm{BCD}} f(z)dz = 0$ が示されれば $\int_{\triangle\mathrm{ABC}} f(z)dz = 0$ が直ちに証明される.

このタイプの議論は p.45 で既に用いている.

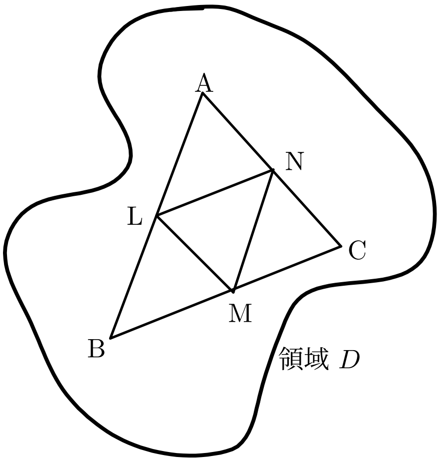
補足その２　外接長方形を用いる証明のギャップ

p.61 で任意の三角形についてコーシーの定理を証明する際に, 外接する長方形を用いました．この議論にはギャップがあることを室蘭工大の桂田英典先生に教えていただきました．この場を借りてお礼申し上げます．長方形が領域 D からはみ出ることがあるというのが問題のギャップです．下の図の $\triangle\mathrm{ABC}$ の場合もこの問題があります．ここを切り抜けるには次のようにします——

$\triangle\mathrm{ABC}$ の 3 つの辺の中点 $\mathrm{L, M, N}$ をとる．図のように $\triangle\mathrm{ABC}$ は一回り小さい 4 つの三角形に分けられる．各小三角形は $\triangle\mathrm{ABC}$ を 1/2 倍に縮小したものである．ここで例えば線分 LN は $\triangle\mathrm{ALN}$ の辺と思ったときと $\triangle\mathrm{LMN}$ の辺と思ったときとでは向きが逆である．線分 LM, 線分 MN についても同様のことがいえる．よって積分の打ち消しあいによって

$$\int_{\triangle\mathrm{ALN}} f(z)dz + \int_{\triangle\mathrm{BML}} f(z)dz + \int_{\triangle\mathrm{CNM}} f(z)dz + \int_{\triangle\mathrm{LMN}} f(z)dz$$
$$= \int_{\triangle\mathrm{ABC}} f(z)dz$$

さてここで $\triangle\mathrm{ALN}$, $\triangle\mathrm{BML}$, $\triangle\mathrm{CNM}$, $\triangle\mathrm{LMN}$ に外接する長方形は $\triangle\mathrm{ABC}$ に外接する長方形より小さく取れる．うまくいけばこれらの小さい長方形は D からはみ出ない．下の図では $\triangle\mathrm{CNM}$ 以外はうまく行く．



中点を用いた分割を繰り返せば $\triangle\mathrm{ABC}$ は自身を $1/2^n$ 倍に縮小した 4^n 個 (n は自然数) の三角形 $T_1, T_2, \ldots, T_m$ $(m = 4^n)$ に分割される．n が十分大きければ, これらの小三角形の外接長方形は D の中に納まって p.61 の議論を適用できる．よって $\int_{T_k} f(z)dz = 0\,(1 \le k \le m)$ が示され,

$$\int_{\triangle\mathrm{ABC}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{T_k} f(z)dz = 0$$

補足その 3　任意の単純閉曲線を折れ線で近似すること

曲線 $C: z=\phi(t),\ \alpha \le t \le \beta$ に沿って関数 $f(z)$ を積分しよう (p.28 参照). 簡単のため, ϕ は C^2 級とする. (C^1 級でもできる. 平均値の定理と ϕ' の一様連続性を合わせて用いればよい.)

正整数 n をしばらく固定する (後で $n \to \infty$ とする). $\delta_n = (\beta-\alpha)/n$ とおく. 区間 $\alpha \le t \le \beta$ を n 等分して $t_m = \alpha + m\delta_n\,(m=0,1,\ldots,n)$ を考える. 各 $m \ge 0$ について $z_m = \phi(t_m)$ とおくと, これらは C 上の点であり, 折れ線 $z_0 z_1 z_2 \ldots z_n$ (複素数の積と紛らわしいが, 新しい記号を導入して煩雑になるのが嫌なので, ここではこう書く) は C を近似している. さて

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} f(z_{m-1})(z_m - z_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} f(\phi(t_{m-1}))(\phi(t_m) - \phi(t_{m-1}))$$

を考えよう. 実変数複素数値関数 $\phi(t)$ の実部 ϕ_1, 虚部 ϕ_2 にテイラーの定理を当てはめると $j=1,2$ について

$$\begin{cases} \phi_j(t_m) = \phi_j(t_{m-1}) + \phi_j'(t_{m-1})\delta_n + \frac{1}{2}\phi_j''(c_{j,m})\delta_n^2, \\ t_{m-1} < \exists c_{j,m} < t_m \end{cases}$$

ここである正定数 M について $|\phi_j''(t)| \le M\,(j=1,2)$ が $\alpha \le t \le \beta$ で成り立つので $m=1,2,\ldots,n$ について $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ より

$$\begin{cases} \phi(t_m) - \phi(t_{m-1}) = \phi'(t_{m-1})\delta_n + E_m, \\ |E_m| \le M\delta_n^2 \end{cases}$$

と表せる (E_m は誤差項 error term). したがって

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} f(\phi(t_{m-1}))\bigl\{\phi'(t_{m-1})\delta_n + E_m\bigr\}$$

$$\left| S_n - \sum_{m=1}^{n} f(\phi(t_{m-1}))\phi'(t_{m-1})\delta_n \right| \le \sum_{m=1}^{n} M\delta_n^2 = M\delta_n(\beta-\alpha)$$

$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ は自明である. また, 区分求積法により (あるいはリーマン和の極限としての実 1 変数の定積分の定義により)

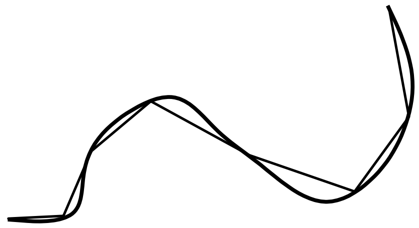
$$\sum_{m=1}^{n} f(\phi(t_{m-1}))\phi'(t_{m-1})\delta_n \to \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

である. この右辺は『明解複素解析』p.28 における複素積分の定義に他ならない. 以上より

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_C f(z)dz$$

C に沿う複素積分 $\int_C f(z)dz$ が S_n で近似されることが判った.

[n が大きいとき各 L_m は短くなり, 折れ線は曲線をよく近似する]



次に折れ線 $z_0z_1z_2\ldots z_n$ に沿う $f(z)$ の積分 T_n と S_n を比べよう. 各 $m = 1, 2, \ldots, n$ について線分 $z_{m-1}z_m$ を L_m と表す. 任意の定数 a について $\int_{L_m} a dz = a(z_m - z_{m-1})$ だから

$$\int_{L_m} f(z)dz - f(z_{m-1})(z_m - z_{m-1}) = \int_{L_m} \{f(z) - f(z_{m-1})\}dz$$

$$T_n - S_n = \sum_{m=1}^{n} \int_{L_m} \{f(z) - f(z_{m-1})\}dz$$

ところで次の性質をもつ正定数 C と正数の列 $M_n (n \geq 1)$ が存在する:

- $L_m\,(m = 1, 2, \ldots, n)$ の長さは $C\delta_n$ 以下
  ($z_m - z_{m-1} = \phi(t_m) - \phi(t_{m-1}) = \phi'(t_{m-1})\delta_n + E_m$ から判る)
- $L_m\,(m = 1, 2, \ldots, n)$ 上で $|f(z) - f(z_{m-1})| \leq M_n$ で $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$
  (C の近傍における f の一様連続性から判る)

p.51 の評価式によって

$$\left| \int_{L_m} \{f(z) - f(z_{m-1})\}dz \right| \leq C\delta_n M_n$$

したがって

$$|T_n - S_n| \leq \sum_{m=1}^{n} C\delta_n M_n \leq C(\beta - \alpha)M_n \to 0 \; (n \to \infty)$$

すなわち $\lim T_n = \lim S_n = \int_C f(z)dz$ である.

C が単純閉曲線なら (十分大きい n について) 折れ線 $z_0z_1\ldots z_n$ も単純閉曲線となり, $T_n = 0$ である. よって $\displaystyle\int_C f(z)dz = \lim T_n = 0$ となる.

単純閉曲線が区分的に C^k 級 $(k \geq 1)$ の場合がある. つまり曲線がほとんどの部分では滑らかだけれども, ところどころに折れ目がある場合である. 例えば p.68 に現れる積分路は 2 つの線分と 2 つの半円をつないだものである. このような場合は曲線をいくつかの C^k 級の (折れ目のない) 部分に分けて上述の議論を用いればよい.

なお折れ線が領域 D からはみ出ることがありうるが, 曲線を十分よく近似する折れ線 (n が十分大きい場合) ならはみ出ないですむ.