大学 1, 2 年程度の話ですが,『高校生のための逆引き微分積分』を読んでいればわかるように説明します. もう少し詳しいことは『実例で学ぶ微積分知恵袋』『明解複素解析』に書きました.

まず偏微分について少しだけ述べます. s と t の **2 変数**関数 $f(s,t)$ があるとします. 例えば $s+3t, st^2, se^t, 2^s\cos(s^3t^5)$ などです. s について微分することもできるし, t について微分することもできます. 例えば s^2t^3 を s について微分すれば $2st^3$ で, t について微分すれば $3s^2t^2$ となります. 2 変数関数の微分を偏微分といいます (3 変数以上の関数の偏微分も考えられます). 偏微分を表す記号としては d の代わりに ∂ を使います. すなわち

$$\frac{\partial}{\partial s}(s^2t^3) = 2st^3, \quad \frac{\partial}{\partial t}(s^2t^3) = 3s^2t^2.$$

2 変数関数 $f(s,t)$ を t について a から b まで積分すると変数 t は消えてしまって, s だけが残ります. したがって $\int_a^b f(s,t)dt$ は s だけの 1 変数関数です. これを微分するとしたら s について微分することしか考えられず, 記号は $\dfrac{d}{ds}$ を使います. つまり $\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_a^b f(s,t)dt$ (t で積分してから s で微分) です.

ところで, t による積分と s による微分の順序を入れ替えたら何ができるでしょう. s による微分が先になります. 微分されるのは 2 変数関数なので偏微分になります. したがって $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}f(s,t)dt$ (s で微分してから t で積分) と表されます.

実は, いつでもとはいいませんが, たいていの場合は上の二つは一致します:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\int_a^b f(s,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}f(s,t)dt.}$$

これを微分と積分の順序交換あるいは積分記号下の微分といいます.

微分と積分の順序交換は理論的な計算に使われることが多いのですが, 具体例の計算に役立つこともよくあります. このことはもっと強調されるべきだと思います. 扱う題材は高校数学か『高校生のための逆引き微分積分』の超高校級微分積分の章程度です.

$\displaystyle\int e^{sx}dx = \frac{e^{sx}}{s} + C$ です. 定積分のかたちで書けば $\displaystyle\int_0^x e^{st}dt = \frac{e^{sx}}{s} - \frac{1}{s}.$

両辺を s で微分します．左辺については微分と積分の順序交換によって

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_0^x e^{st}dt = \int_0^x \dfrac{\partial}{\partial s}e^{st}dt = \int_0^x te^{st}dt \\ \dfrac{d}{ds}\Big(\dfrac{e^{sx}}{s} - \dfrac{1}{s}\Big) = \Big(\dfrac{x}{s} - \dfrac{1}{s^2}\Big)e^{sx} + \dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

したがって $\displaystyle\int_0^x te^{st}dt = \Big(\frac{x}{s} - \frac{1}{s^2}\Big)e^{sx} + \frac{1}{s^2}$ となります． 不定積分バージョンは

$$\int xe^{sx}dx = \Big(\frac{x}{s} - \frac{1}{s^2}\Big)e^{sx} + C$$

です． s による微分を繰り返せば $\int x^n e^{sx}dx$ が求められます．部分積分を何度も繰り返すのとどちらが楽でしょう？ 微分を繰り返す方法なら

$$\int x^n e^{sx}dx = \Big(\frac{x^n}{s} + \cdots + \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}\Big)e^{sx} + C$$

がたちまちわかります． $p > 0$ のとき x^n のラプラス変換 $\mathcal{L}[x^n](p)$ は

$$\mathcal{L}[x^n](p) = \int_0^\infty x^n e^{-px}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M x^n e^{-px}dx = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

次に $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$ なので $s > 0$ なら

$$\int \frac{1}{s^2+x^2}dx = \frac{1}{s}\arctan\frac{x}{s} + C_1$$

が成り立ちます．両辺を s で微分して，微分と積分の順序交換を用いると

$$\int \frac{-2s}{(s^2+x^2)^2}dx = -\frac{1}{s^2}\arctan\frac{x}{s} - \frac{x}{s(s^2+x^2)} + C_2$$

例えば $s = 1$ とおいて両辺を -2 で割ると

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\Big(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\Big) + C_3$$

$\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ が微分と積分の順序交換を利用して求められます．大学入試問題 17 の積分にもこの方法が使えます．