逆関数の微分ではなくて積分です. 関数 f の積分がよくわかっているときに, 逆関数 f^{-1} の積分 $\int f^{-1}(x)dx$ について調べましょう. $f^{-1}(x)=t$ つまり $x=f(t)$, $dx=f'(t)dt$ とおいて置換積分 B 型を用いた後に部分積分すると

$$\int f^{-1}(x)dx=\int tf'(t)dt=tf(t)-\int f(t)dt\cdots\cdots(*)$$

大学入試問題 3(3) の計算に似ています.

f の積分がよくわかっていれば f^{-1} の積分も $(*)$ からわかります.
$(*)$ を $f^{-1}(x)=\log x, \arcsin x, \arctan x$ として使って見ると

$$\int \log x dx=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+C=x\log x-x+C \tag{1}$$

$$\int \arcsin x dx=t\sin t-\int \sin t dt=x\arcsin x+\cos t+C$$

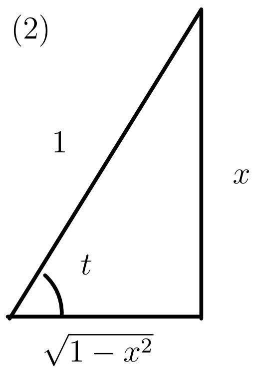
$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C \tag{2}$$

$$\int \arctan x dx=t\tan t-\int \tan t dt=t\tan t+\log|\cos t|+C$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C \tag{3}$$

(2) と (3) の $\cos t$ は下の図からわかります. (2) の場合は $t=\arcsin x$ つまり $\sin t=x$ です. (3) の場合は $t=\arctan x$ つまり $\tan t=x$ です.

(2)



(3)