微分にしても積分にしても, 暗算で間違えるよりも紙に書いて正確な計算をする方がよいというのが私の持論です．『高校生のための逆引き微分積分』もそういう方針に基づいています．ただ，積分に重点を置いたので微分の計算の説明は軽くなりました．この文書でそれを補います．

大学入試問題 3　まず $y = e^{-x^3}$ を微分します．$y = e^t$ に $t = -x^3$ を代入したものです．

$$\frac{dy}{dt} = e^t = e^{-x^3}, \quad \frac{dt}{dx} = -3x^2$$

となります．$\dfrac{dy}{dt}$ について，t による微分の後で $t = -x^3$ を代入するのを忘れてはいけません．上の二つを掛け合わせて

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-x^3} \cdot (-3x^2) = -3x^2 e^{-x^3}$$

次は積の微分法によって

$$f'(x) = x' e^{-x^3} + x(e^{-x^3})' = e^{-x^3} + x(-3x^2 e^{-x^3}) = (1-3x^3)e^{-x^3}$$

大学入試問題 5　別解の中で $(\log x)^{n+1}$ を微分しています．これを y と表しましょう．$y = t^{n+1}$ に $t = \log x$ を代入したものが $y = (\log x)^{n+1}$ です．

$$\frac{dy}{dt} = (n+1)t^n = (n+1)(\log x)^n, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

なので，これらを掛け合わせて

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = (n+1)(\log x)^n \cdot \frac{1}{x} = (n+1)\frac{(\log x)^n}{x}$$

大学入試問題 9　$n \geq 2$ のとき $\cos^{n-1}\theta$ を θ で微分する代わりに, 文字を変えて，$y = \cos^{n-1} x$ を x で微分しましょう．$y = t^{n-1}$ に $t = \cos x$ を代入したものが $y = \cos^{n-1} x$ です．

$$\frac{dy}{dt} = (n-1)t^{n-2} = (n-1)\cos^{n-2} x, \quad \frac{dt}{dx} = -\sin x$$

を掛け合わせて

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = (n-1)\cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x$$

大学入試問題 17　本文とは文字を変えて $y = (1+x^2)^{-(n+\frac{1}{2})}$ を x で微分しましょう．$y = t^{-(n+\frac{1}{2})}$ に $t = 1+x^2$ を代入したのが $y = (1+x^2)^{-(n+\frac{1}{2})}$ です．

> 一般に $y = \dfrac{1}{t^a}$ は $y = t^{-a}$ と見なす方が計算がしやすいことを思い出しましょう．なぜなら $\dfrac{d}{dt}t^p = pt^{p-1}$ という簡単な公式が，任意の実数 p に対して成り立つからです．

さて，

$$\frac{dy}{dt} = -\left(n+\frac{1}{2}\right)t^{-(n+\frac{1}{2})-1} = -\left(n+\frac{1}{2}\right)t^{-(n+\frac{3}{2})} = -\left(n+\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-(n+\frac{3}{2})}$$
$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

を掛け合わせて

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\left(n+\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-(n+\frac{3}{2})} \cdot 2x \\ &= -(2n+1)x(1+x^2)^{-(n+\frac{3}{2})} = -(2n+1)\frac{x}{(1+x^2)^{n+\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

> ついでに漸化式の導き方の説明を補足します．以下では文字は本文に合わせて，独立変数は t とします．
>
> $$\begin{aligned}&\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$t=0$ から $t=x$ まで積分すると, $n+\dfrac{3}{2}=(n+1)+\dfrac{1}{2}$ より

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+\frac{3}{2}}}dt = f_n(x) - f_{n+1}(x)$$

非常に気になることがあります．第 10 章の $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ と合成関数の微分法の公式から

$$\bigl(\arctan f(x)\bigr)' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} \tag{1}$$

が出ます．簡単なことのはずなのにそれがわからないという人がいます．そして，この式はわからないのに

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x) \tag{2}$$

ならわかるというのです．実に不自然な話です．本当にわかっているのかどうか疑わしいと思います．合成関数の微分法の公式を理解せずに (2) を丸暗記しただけなのではないでしょうか.「覚える」と「理解する」「わかる」「納得する」を混同しているのではないでしょうか．たいへん危なっかしいと思います．こういう風になってはいけません．