べき乗関数の微分の公式

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0)$$

を α が有理数の場合に証明します．微分の定義だけを使います．逆関数・合成関数の微分法の公式や対数微分法などは使いません．

そもそも関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

したがって $\alpha = \dfrac{p}{q}$ $(p, q$ は自然数$)$ の場合

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \lim_{y \to x} \frac{y^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{y - x}$$

そこで $x^{\frac{1}{q}} = s,\ y^{\frac{1}{q}} = t$ とおくと等比数列の和の公式より

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' &= \lim_{t \to s} \frac{t^p - s^p}{t^q - s^q} = \lim_{t \to s} \frac{(t-s)(t^{p-1} + t^{p-2}s + \cdots + ts^{p-2} + s^{p-1})}{(t-s)(t^{q-1} + t^{q-2}s + \cdots + ts^{q-2} + s^{q-1})} \\ &= \lim_{t \to s} \frac{t^{p-1} + t^{p-2}s + \cdots + ts^{p-2} + s^{p-1}}{t^{q-1} + t^{q-2}s + \cdots + ts^{q-2} + s^{q-1}} = \frac{ps^{p-1}}{qs^{q-1}} = \frac{p}{q} s^{p-q} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$

今度は $\alpha = -\dfrac{p}{q}$ $(p, q$ は自然数$)$ の場合，上の結果を用いて

$$\begin{aligned}\left(x^{-\frac{p}{q}}\right)' &= \lim_{t \to s} \frac{t^{-p} - s^{-p}}{t^q - s^q} \\ &= \lim_{t \to s} \frac{1}{s^p t^p} \frac{s^p - t^p}{t^q - s^q} = \lim_{t \to s} \frac{1}{s^p t^p} \cdot \underbrace{\lim_{t \to s} \frac{s^p - t^p}{t^q - s^q}}_{\text{計算済み}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{2p}{q}}} \left(-\frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}\right) = -\frac{p}{q} x^{-\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$