畳み込み作用素の全射性
滑らかでない核の場合

ひでし　かんせい
山根英司 (関西学院大)

岡田靖則 (千葉大) との共同研究
芝浦工業大学 漸近解析とその周辺
2024 年 12 月 1 日 (日曜日), 10:00--10:50

1. $\mathcal{C}^\infty$ 級関数の空間における全射

- 任意の定数係数線形偏微分作用素 $P(D) \neq 0$ について
$$P(D)\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$
は全射 (Ehrenpreis-Malgrange).
- 任意の $a \in \mathbb{R}^n$ について
$$\text{平行移動}\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n);\ u(x) \to u(x-a)$$
は全射.

前者は $P(D)\delta(x)$ との，後者は $\delta(x-a)$ との畳み込み.
一般論の中に位置づけられる.

2. 畳み込み作用素の invertibility

$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ コンパクト台 (シュヴァルツ) 超関数

フーリエ変換 $\hat{u}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n$ は整関数 $\hat{u}(\zeta), \zeta \in \mathbb{C}^n$ に拡張される.

$u* \colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を定める.
これが全射のとき u は **invertible** だという.（単射性を要求しない.）

ものすごく大ざっぱに述べると……
$u * f = g$ は $\hat{u}\hat{f} = \hat{g}$ なので, $\hat{u}$ で割り算ができるかという問題.
$\hat{u}$ が小さすぎてはいけない.（少しくらい零点があってもよい.）
遠方で負べき程度の減衰ならば invertible. $\cos$ が掛かっても良い.

3. slowly decreasing function

定理 (Ehrenpreis '60)

$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ が **invertible** ($u* \colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ が全射) であることは下の各条件と同値.

(ア) [複素領域での評価] $\exists A > 0$ s. t.

$$\sup\{|\hat{u}(\zeta)|\,;\, \zeta \in \mathbb{C}^n, |\zeta - \xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

(イ) [実領域での評価] $\exists A > 0$ s. t.

$$\sup\{|\hat{u}(\eta)|\,;\, \eta \in \mathbb{R}^n, |\eta - \xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

(ウ) $u* \colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ は全射.

4. slowly decreasing function

(イ) は　$\exists A > 0$ s. t.

$$\sup\{|\hat{u}(\eta)|\,;\eta \in \mathbb{R}^n, |\eta-\xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$.

各 ξ のまあまあ近くで sup が大きい (小さすぎない) という条件.
ところどころ山があれば十分．谷，あるいは零点があってもよい.
$\hat{u}(\eta) = |\eta|^{-A}\cos|\eta|$ でもよい.

(イ) が満たされるとき，整関数 $\hat{u}(\zeta)$ は **slowly decreasing** だという.

u が invertible であることと同値.

5. 既知の invertible distributions

- $\sum_{j=1}^{J} P_j(D)\delta(x-a_j) \neq 0$ は invertible (多分 Hörmander，冒頭の 2 つの例を含む).
- μ はアトムを持つコンパクト台の測度，$\nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ の $\mathrm{singsupp}$ は $\mathrm{singsupp}\,\mu$ と disjoint で，$P(D) \neq 0$ は定数係数線形偏微分作用素とすると，$P(D)\mu + \nu$ は invertible (Abramczuk).
- 球面 $|x| = r$ に台を持つデルタ関数は invertible (Lim).
  それの法線方向の (高階) 導関数も invertible (岡田・山根).
- u_1 と u_2 が invertible ならば $u_1 * u_2$ もそうである.
  invertibility は平行移動と相似拡大で保たれる.

もっとたくさんの例，十分条件が欲しい．

6. フーリエ変換と有限ハンケル変換

球対称かつコンパクト台の普通の関数で，invertible なものを探す.
$0 < s \leq 1$ の関数 $\varphi(s)$ に対し

$$f(x) = \varphi(|x|)\chi_{[0,1]}(|x|), x \in \mathbb{R}^n$$

について ($\chi_{[0,1]}(\cdot)$ は区間の定義関数)

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\text{const.}}{r^{n/2-1}} \int_0^1 \underbrace{s^{n/2}}_{\text{注目！}} \varphi(s) J_{n/2-1}(rs)\, ds,$$

$r = |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.　整関数として拡張できる.

slow decrease を示すには，$\int_0^1 s^{n/2}\varphi(s)J_{n/2-1}(rs)\,ds$ を下から評価すればよい.
$|\xi| = r \to \infty$ で冪程度の減少であること，またはそれに cos が掛かった挙動であることを言えばよい.

7. 有限ハンケル変換の漸近挙動

$\int_0^1 (\text{some function}) J_{n/2-1}(rs)\, ds$ の形の積分の $r \to \infty$ での漸近挙動を調べる．

被積分関数は $0 < s \le 1$ で $\mathcal{C}^1$ 級とする．

([Okada-Y] SIGMA 2024 では $0 < s < 1$ で $\mathcal{C}^\infty$ 級と仮定して，Sonine の公式と Roderick Wong の結果を利用した．今回は定式化も証明も異なる．)

$r \to \infty$ **での漸近挙動は両端** $s \to +0$ **と** $s \to 1-0$ **の値あるいは特異性で決まる (フーリエ変換に少し似ている).**

8. 主定理

$$\varphi(s) = s^{\mu} + \sum_{\alpha \in S} c_{\alpha} s^{\mu+\alpha} + s^{n/2}\psi(s) \ (0 < s \leq 1),$$

とする． S は有限集合で，元は正の実部をもつ複素数.
$\psi \in C^1((0,1])$
$\lim_{s \to +0} s^n \psi(s) = 0,\ s^{n-1}\psi(s) \in L^1((0,1)),\ s^{n/2-3/2}\psi'(s) \in L^1((0,1))$

とする．(左端で多少の特異性は許す．区間の右端は閉じている．)

$$f(x) = |x|^{-n/2}\varphi(|x|)\chi_{[0,1]}(|x|),\ x \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 2.$$

とおくとき，次が成り立つ.

(i) $-n/2 < \mathrm{Re}\,\mu \leq 1/2$ ならば $f(x)$ は invertible.

(ii) $\mathrm{Re}\,\mu > 1/2$ かつ非退化条件 $\varphi(1) = 1 + \sum_{\alpha \in S} c_{\alpha} + \psi(1) \neq 0$ が成り立つならば $f(x)$ は invertible.

9. 証明の方針

$q(r) := \int_0^1 \varphi(s) J_{n/2-1}(rs)\, ds$ の $r \to \infty$ のときの漸近展開を調べる．$s \to +0$ の寄与と $s = 1$ の寄与を別々に調べる．

$s \to +0$ は Luke, Y. L., Integrals of Bessel functions, 1962. の式から簡単に出る．

$s = 1$ の寄与はフーリエ積分の計算を真似て部分積分．
$(e^{i\xi x})' = i\xi e^{i\xi x}$ の代わりにベッセル関数の漸化式 (昇降演算子) を使う．

10. Luke の本より

$$\int_0^z t^\mu J_\nu(t)\,dt = \frac{2^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)} - \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} z^{\mu-1/2}(f\cos\theta + g\sin\theta),$$

$$(\mathrm{Re}\,(\mu+\nu) > -1, \quad |z| \to \infty, \quad |\arg z| < \pi).$$

(定数と z の $\mu - 1/2$ 乗.).

ここで,
$$\theta = \theta(z) = \theta(z;\nu) = z - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{2k} z^{-2k}, \quad g \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{2k+1} z^{-2k-1},$$

$$a_k = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\ell=0}^{k} (-k)_\ell \left(\mu - k + \frac{1}{2}\right)_\ell \left(\nu - k + \ell + \frac{1}{2}\right)_{k-\ell}$$
$$\times \left(-\nu - k + \ell + \frac{1}{2}\right)_{k-\ell} 2^\ell.$$

11. 有限ハンケル変換: $r^{-\mu-1}$ と $r^{-3/2}$

$\mathrm{Re}\,(\mu+\nu) > -1$ ならば $r \to \infty$ のとき

$$\int_0^1 s^\mu J_\nu(rs)\,ds$$
$$= \frac{2^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)} r^{-\mu-1} - \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} r^{-3/2} \cos\theta(r) + O(r^{-5/2}).$$

($r^{-\mu-1}$ と $r^{-3/2}$. どっちが dominant? $\mathrm{Re}\,\mu$ と 1/2 の大小次第.)

$\because$) 前のページの式で $z = 1$ とし, $t = rs$ と置換すると

$$\int_0^1 (rs)^\mu J_\nu(rs)\,r\,ds \quad (\leftarrow r^{\mu+1} \text{ で割れば目標の式の左辺になる})$$
$$= \frac{2^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)} - \frac{2^{1/2} r^\mu}{(\pi r)^{1/2}} \left\{ f(r)\cos\theta(r) + g(r)\sin\theta(r) \right\}.$$

12. $\psi(1)$ の寄与

$\nu = n/2 - 1 \geq 0$ とすると

$$\int_0^1 \psi(s) s^{\nu+1} J_\nu(rs)\, ds = \psi(1) \frac{J_{\nu+1}(r)}{r} + o(r^{-3/2}).$$

右辺第 1 項は $r^{-3/2}$ のオーダー ($\times$ 振動因子)

Luke からは $r^{-3/2}$($\times$ 振動因子) と $r^{-\mu-1/2}$. 振動因子は同じ.

$rs^{\nu+1} J_\nu(rs) = \frac{d}{ds}\left\{s^{\nu+1} J_{\nu+1}(rs)\right\}$ (昇降演算子) と部分積分

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi(s) s^{\nu+1} J_\nu(rs)\, ds &= \frac{1}{r}\int_0^1 \psi(s) \frac{d}{ds}\left\{s^{\nu+1} J_{\nu+1}(rs)\right\} ds \\ &= r^{-1}\int_0^1 \psi'(s) s^{\nu+1} J_{\nu+1}(rs)\, ds + \psi(1)\frac{J_{\nu+1}(r)}{r}.\end{aligned}$$

$J_{\nu+1}(z) = \mathrm{const.} z^{-1/2} \cos(z - \mathrm{const.}) + z^{-3/2}(\text{bounded function})$
とリーマン・ルベーグの定理.

13. 主定理 (再掲)

$$\varphi(s) = s^{\mu} + \sum_{\alpha \in S} c_\alpha s^{\mu+\alpha} + s^{n/2}\psi(s)\ (0 < s \leq 1),$$

とする． S は有限集合で，元は正の実部をもつ複素数.

$\psi \in C^1((0,1])$ ←右端は閉じている

$\lim_{s \to +0} s^n \psi(s) = 0,\ s^{n-1}\psi(s) \in L^1((0,1)),\ s^{n/2-3/2}\psi'(s) \in L^1((0,1))$

とする．(左端で多少の特異性は許す．)

$$f(x) = |x|^{-n/2}\varphi(|x|)\chi_{[0,1]}(|x|),\ x \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 2.$$

とおくとき，次が成り立つ.

(i) $-n/2 < \mathrm{Re}\,\mu \leq 1/2$ ならば $f(x)$ は invertible.

(ii) $\mathrm{Re}\,\mu > 1/2$ かつ非退化条件 $\varphi(1) = 1 + \sum_{\alpha \in S} c_\alpha + \psi(1) \neq 0$ が成り立つならば $f(x)$ は invertible.

14.$-n/2 < \mathrm{Re}\,\mu < 1/2$ の場合の証明

Luke の式から出てくる $r^{-\mu-1}$ の項が leading term ($r^{-3/2}$ より大きい)
$q(r) := \int_0^1 \varphi(s) J_{n/2-1}(rs)\, ds$ は slowly decreasing.

15.$\mathrm{Re}\,\mu = 1/2$ の場合の証明

[ア] s^{μ} から $r^{-\mu-1}$ の nonzero const. 倍が出る．
($s^{\mu+\alpha}$ から出る $r^{-\mu-\alpha-1}$ は小さいので無視．$\mathrm{Re}\,\alpha > 0$) .

[イ]s^{μ} と $s^{\mu+\alpha}$ のひとつひとつから $r^{-3/2}\cos(r+\mathrm{const.})$ が出る．
ψ に関する部分積分の式から同類項が出る．
和は $\varphi(1)r^{-3/2}\cos(r+\mathrm{const.})$ の nonzero const. 倍

$\varphi(1)=0$ ならば [ア] が leading term を与えて slow decrease (と invertibility) がしたがう．

$\varphi(1)\neq 0$ でも cos の零点を選べば [ア] の $r^{-\mu-1}$ の nonzero const. 倍だけが残って slow decrease がしたがう．

16.(ii) $\mathrm{Re}\,\mu > 1/2$ かつ $\varphi(1) \neq 0$ の場合の証明

$r^{-\mu-1}$ は $r^{-3/2}$ より小さいので無視できる.
$\varphi(1) r^{-3/2} \cos(r + \mathrm{const.})$ の nonzero const. 倍が leading term.
$\cos = 1$ となるような r たちを選べば slow decrease が言える.

17. 補足，$\mathcal{C}^\infty$ 級の場合 (Okada-Y., SIGMA 2024)

$n \geq 2$ で $\varphi(s)$ は $(0,1)$ の $\mathcal{C}^\infty$ 級関数とする．$\phi(t)$ を

$$\varphi(s) = s^{n/2}\phi(s^2) \quad (0 < s < 1)$$

で定める．$\varphi(s)$ は $(0,1)$ で $\mathcal{C}^\infty$ 級，$\mathrm{Re}\,(\mu + n/2) > 0$,
$s \to +0$ のとき $\varphi^{(j)}(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d^j}{ds^j} s^{\mu+k} \quad (j = 0,1,2,\dots)$ とする．
$-1 < \mathrm{Re}\,\lambda_0 < \mathrm{Re}\,\lambda_1 < \cdots < \mathrm{Re}\,\lambda_m < \mathrm{Re}\,\Lambda$, $N \leq \mathrm{Re}\,\Lambda$,
$\mathrm{Re}\,\lambda_0 \leq N - 1$ とする．$\phi(t)$ は $(0,1)$ の関数で,

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k (1-t)^{\lambda_k} + (1-t)^\Lambda \psi(t) \quad (1 - 2\varepsilon < t < 1)$$

とする．ここで $a_0 \neq 0$ で $\psi(t)$ は $(0,1)$ の $\mathcal{C}^\infty$ 級関数で
$\psi^{(k)}(t)\,(0 \leq k \leq N)$ は $(1-2\varepsilon, 1)$ で可積分とする．
このとき,

$$f(x) = |x|^{-n/2}\varphi(|x|)\chi_{[0,1]}(|x|) = \phi\left(|x|^2\right)\chi_{[0,1]}(|x|) \ \ (x \in \mathbb{R}^n)$$

は invertible． ここで， $\chi_{[0,1]}(\cdot)$ は $[0,1]$ の定義関数.

18. 証明

$s \to 1-0$ からの寄与を調べるには Sonine の

$$\int_0^1 s^{\nu+1}\left(1-s^2\right)^{\alpha} J_\nu(rs)\,ds = 2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)r^{-(\alpha+1)}J_{\nu+\alpha+1}(r)$$

を用いる．
剰余項の処理には部分積分を用いる．(部分積分で昇降演算子を使うのはさきほどと同様だが，何度も部分積分を繰り返すのでもっと面倒である．)

$s \to +0$ からの寄与を調べるには Roderick Wong 1976 の漸近展開公式を使う．Luke は使わない．