Generalized spherical mean value operators on Euclidean space

ひでし　かんせい
山根英司 (関西学院大学)

いま **理工**学部数理科学科
来年度 **理**学部数理科学科

岡田靖則氏 (千葉大学) との共同研究
arXiv:2003.10005
to appear in Tsukuba J. of Math.

超幾何方程式研究会 2021
1 月 5 日 火曜日

1. Lim 2012, dissertation, Tufts Univ.

hyperbolic space も扱っているが，ここではユークリッド空間についてのみ述べる.
noncompact 対称空間は Christensen-Gonzalez-Kakehi (JFA2017)

$S(x,r)$: $n-1$ 次元球面，　中心 $x\in\mathbb{R}^n$, 半径 $r>0$.
$c_r=\frac{\Gamma(n/2)r^{n-1}}{2\pi^{n/2}}$: その表面積の逆数

Mean value operator (平均値作用素) M_r と
コンパクト台超関数 $\delta_{S(0,r)}$ を導入

$$M_r u(x):=c_r\int_{S(x,r)}u(y)\,dS_{x,r}(y),$$

$$\delta_{S(0,r)}: u(x)\mapsto M_r u(0).$$

$M_r:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $M_r:\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ である.
また,

$$M_r u(x)=\delta_{S(0,r)}*u(x)\ \text{(たたみこみ)}.$$

2. Lim の dissertation 続き

1. $M_r = \delta_{S(0,r)} * \colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ は全射.
2. $M_r = \delta_{S(0,r)} * \colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ も全射.
3. コンパクト台の場合
   $V = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ のどちらのときも
   $$\begin{aligned}&\operatorname{range}\Big(\delta_{S(0,r)} * \colon V \to V\Big)\\ &= \Big\{w \in V;\, \hat{w}(\zeta) = 0 \text{ if } (\delta_{S(0,r)})^\wedge(\zeta) = 0\Big\}.\end{aligned}$$

$(\delta_{S(0,r)})^\wedge(\zeta)$ は Bessel 関数で書ける．この事実は 1．, 2．の証明でも使う.
たたみ込み方程式の定石 $(u * v)^\wedge = \hat{u}\hat{v}$.
定数係数線形偏微分方程式はたたみ込み方程式の例であり,
$P(D)u = P(D)\delta * u$ について $(P(D)\delta)^\wedge = P(\zeta)$.

3. デルタ関数の Fourier 変換

正規化された Bessel 関数 (entire な偶関数).

$$j_\nu(z) := \Gamma(\nu+1)\left(\frac{2}{z}\right)^\nu J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (\nu > -1).$$

球 Bessel 関数とは違う.

$$\widehat{\delta}_{S(0,r)}(\xi) = j_{n/2-1}(r|\xi|) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n) \quad \text{(Helgason の本)}$$

$$\widehat{\delta}_{S(0,r)}(\zeta) = j_{n/2-1}\left(r\sqrt{\zeta^2}\right) \quad (\zeta \in \mathbb{C}^n, \zeta^2 = \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_n^2).$$

z の偶数ベキに $r|\xi|, r\sqrt{\zeta^2}$ を代入するから特異性はない．entire.

正規化 Bessel 関数は実軸上の遠方で減衰振動する.
減衰は負べき程度.

4. 一般化平均値作用素

n_y: $y \in S(x,r)$ における $S(x,r)$ の外向き単位法線.

$\ell = 0, 1, 2, \dots$ について

$$M_r^{(\ell)} u(x) := c_r \int_{S(x,r)} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} \right)^{\ell} u(y)\, dS_{x,r}(y)$$

と定義すると

$$M_r^{(\ell)} u(x) = \frac{\partial^\ell \delta_{S(0,r)}}{\partial r^\ell} * u(x).$$

$\left(\frac{\partial^\ell \delta_{S(0,r)}}{\partial r^\ell} \right)^{\wedge} (\zeta)$ を調べる必要がある.

5. $\dfrac{\partial^\ell \delta_{S(0,r)}}{\partial r^\ell}$ の Fourier 変換

$$\widehat{\delta}_{S(0,r)}(\xi) = j_{n/2-1}\big(r|\xi|\big)$$

$r|\xi|$ の偶数べきのみからなる．
$\mathbb{C}^n$ の entire function に拡張できる．$(r|\xi|)^2$ を $r^2\zeta^2$ に置き換える．

r で微分すると正規化 Bessel 関数の導関数が出てくる．

$$\left(\frac{\partial^\ell \delta_{S(0,r)}}{\partial r^\ell}\right)^\wedge(\xi) = |\xi|^\ell j^{(\ell)}_{n/2-1}(r|\xi|).$$

$\mathbb{C}^n$ の entire function に拡張できる．

6. 主結果 (O-Y)

1. $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell *\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ は全射.
2. $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell *\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ も全射.
3. [コンパクト台の場合] $\ell = 0, 1$ and $n \geq 2$ とすると $V = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ のどちらの場合も

$$\begin{aligned}&\mathrm{range}\left(\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell *\colon V \to V\right)\\&= \left\{w \in V;\, \hat{w}(\zeta) = 0 \text{ if } (\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell)^\wedge(\zeta) = 0\right\}.\end{aligned}$$

ranges は Bessel 関数の零点で特徴づけられる.

注: $\ell = 0$ は Lim (ranges の話は $n = 1$ も可)
証明は正規化 Bessel 関数の導関数の漸近挙動による.

7. 正規化 Bessel 関数の導関数

$$j_\nu(x) = \Gamma(\nu+1)\left(\frac{2}{x}\right)^\nu J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$(x^{-\nu}J_\nu(x))' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$ より

$$j_\nu'(x) = -\frac{x}{2(\nu+1)}j_{\nu+1}(x).$$

$\nu > -1$, $\ell \geq 0$ について $\exists C_{\ell,k} = C_{\ell,k}^{(\nu)} \neq 0$ such that

$$j_\nu^{(\ell)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\ell/2}^{\ell} C_{\ell,k}x^{2k-\ell}j_{\nu+k}(x) & (\ell : \text{even}), \\ \displaystyle\sum_{k=(\ell+1)/2}^{\ell} C_{\ell,k}x^{2k-\ell}j_{\nu+k}(x) & (\ell : \text{odd}). \end{cases}$$

$C_{\ell,k}$ は具体的に書ける.

$\mathbb{R} \ni x \to \infty$ で漸近挙動は $k=\ell$ の項が dominant.

8. 漸近挙動

補題. $\exists A, B > 0$ such that

$$\sup\left\{\left|j_{n/2-1}^{(\ell)}(r|\eta|)\right|; \eta\in\mathbb{R}^n, |\eta-\xi|<A\log(2+|\xi|)\right\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$ with $|\xi|>B$. 実領域の話.

注. $\left(\frac{\partial^\ell\delta_{S(0,r)}}{\partial r^\ell}\right)^\wedge(\xi) = |\xi|^\ell j_{n/2-1}^{(\ell)}(r|\xi|)$ も同じ (より良い) 評価を満たす.

証明. $j_\nu^{(\ell)}(x)$ は $x^{2k-\ell}j_{\nu+k}(x)$ たちの線型結合.

$$J_\mu(x)\sim \mathrm{const.}\, x^{-1/2}\cos(x-\mathrm{const.})(\mathbb{R}\ni x\to\infty),$$
$$j_\mu(x)\sim \mathrm{const.}\, x^{-(\mu+1/2)}\cos(x-\mathrm{const.})(\mathbb{R}\ni x\to\infty),$$
$$x^{2k-\ell}j_{\nu+k}(x)\sim \mathrm{const.}\, x^{k-(\nu+\ell+1/2)}\cos(x-\mathrm{const.})(\mathbb{R}\ni x\to\infty)$$

k が最大のもの ($k=\ell$) が dominant.

9.Invertibility

Theorem (Hörmander の本)

$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ について次の 3 つは同値.

(i) $\exists A > 0$ such that for $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sup\{|\hat{u}(\zeta)|; \zeta \in \mathbb{C}^n, |\zeta - \xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}.$$

(ii) もし $w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ で $\hat{w}/\hat{u}$ が正則ならば, $\hat{w}/\hat{u}$ は $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ の元の Fourier 変換である (増大度で特徴づけられる: Paley-Wiener).

(iii) もし $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $u * v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ が ***invertible*** とは上の定理の条件を満たすこと.

例. $u(x) = (1-\Delta)\delta(x)$, $\hat{u}(\xi) = 1 + \xi^2 > 0 \, (\xi \in \mathbb{R}^n)$.
素朴な意味で ”可逆” (逆はマイナス 2 階の擬微分作用素)
上の invertibility はこれよりもかなり弱い.
実は任意の定数係数線形偏微分作用素 $P(D) \neq 0$ について $P(D)\delta(x)$ は invertible.

10. invertibility の実用的十分条件 (実領域, 十分遠く)

Invertibility の定義 (i): 複素領域

$\exists A > 0$ such that

$$\sup\{|\hat{u}(\zeta)|\,;\, \zeta \in \mathbb{C}^n, |\zeta - \xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

---

sup が大という話だから，ζ を狭い範囲に限って sup が大ならば十分である．
さらに ξ が遠方にある場合に sup が大ならば十分 (A を大きく取り直す).

実用的十分条件: 実領域, 十分遠く

$\exists A, B > 0$ such that

$$\sup\{|\hat{u}(\eta)|\,;\, \eta \in \mathbb{R}^n, |\eta - \xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ satisfying $|\xi| > B$.

11. デルタ関数の導関数は invertible

定理. $\boxed{\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell \,(\ell \geq 0) \text{ は invertible.}}$

証明.

$$\left(\frac{\partial^\ell \delta_{S(0,r)}}{\partial r^\ell}\right)^\wedge (\xi) = |\xi|^\ell j^{(\ell)}_{n/2-1}(r|\xi|)$$

漸近展開が分かり，invertibility が従う (実用的十分条件).

注. $j_\nu(\cdot)$ は偶関数なので，$j_{n/2-1}(r|\xi|)$ を解析接続すると entire even function $j_{n/2-1}(r\sqrt{\zeta^2})$ になる．
$|\xi|^\ell j^{(\ell)}_{n/2-1}(r|\xi|)$ も同様.

12.invertibility, 全射性

Theorem (Hörmander の本にある定理の特別な場合)

$\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ とする．次の 3 つは同値.

(i) $\mu *\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ は全射.

(ii) $\mu *\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ は全射.

(iii) μ は invertible.

例. $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell$ は invertible. よって (i), (ii) も満たす.

$\mathbb{R}^n$ 全体ならばこれでよい．部分開集合で話をするならば，ある種の凸性の議論が必要になる.

13. 正則関数の割り算 1

コンパクト台超関数の空間で $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell *$ の range を調べるには，invertiblity の特徴づけの

(ii) もし $w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ で $\hat{w}/\hat{u}$ が正則ならば, $\hat{w}/\hat{u}$ は $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ の元の Fourier 変換である

を使う.
$\hat{v} := \hat{w}/\hat{u}$ とおけば $\hat{u}\hat{v} = \hat{w}$ であり，$w = u * v \in \mathrm{range}(u*)$.

まとめると，
u が invertible とすると (例えば $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell$)

(ii') もし $w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ について $\hat{w}/\hat{u}$ が正則ならば,

$$w \in \mathrm{range}(u* : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)).$$

注: (ii') の逆は (invertibility なしでも) 自明.
$w = u * v$ ならば $\hat{w}/\hat{u} = \hat{v}$.

14. 正則関数の割り算 2

u が invertible とすると (例えば $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell$)

(ii') もし $w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ について $\hat{w}/\hat{u}$ が正則ならば,
$w \in \mathrm{range}(u* : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$.

であることを使いたい．正則関数の割り算について論じる．

Lemma

$a(\zeta)$ と $b(\zeta)$ は $\mathbb{C}^n$ の開集合 U 上の正則関数とする．
$Z = \{\zeta \in U; a(\zeta) = 0\}$ とおき，$da(\zeta) \neq 0$ on Z と仮定する．
もし $b(\zeta) = 0$ on Z ならば, $b(\zeta)/a(\zeta)$ は U 上の正則関数である．

証明.

座標変換で $a(\zeta) = z_1$ とできる． □

15. 正則関数の割り算 3

補題. $n \geq 2$ とする.

$$f_1(\zeta) := j_{n/2}(r\sqrt{\zeta^2}), f_2(\zeta) := \zeta^2$$

とおく.

もし $g(\zeta)$ が $Z := \{\zeta \in \mathbb{C}^n; f_1(\zeta)f_2(\zeta) = 0\}$ の近傍で正則で

$g(\zeta) = 0$ on Z ならば,

$g(\zeta)/[f_1(\zeta)f_2(\zeta)]$ は Z の近傍で正則である.

注. $\left(\partial\delta_{S(0,r)}/\partial r\right)^{\wedge}(\zeta) = \text{const.}\ f_1(\zeta)f_2(\zeta)$.

証明. $Z_k = \{f_k(\zeta) = 0\}$ とおく. $j_{n/2}(z)$ の零点は全て nonzero かつ simple だから,

$$Z = Z_1 \cup Z_2, Z_1 \cap Z_2 = \emptyset, 0 \notin Z_1, 0 \in Z_2$$

であり, $df_1(\zeta) \neq 0$ on Z_1 が成り立つ. Z_1 は特異性なし.

0 は Z_2 の特異点.

直前の補題を 2 回使う. $g(\zeta)/[f_1(\zeta)f_2(\zeta)]$ は 0 以外のところで正則である. Hartogs の拡張定理より, 孤立特異点 0 は除去可能.

16. コンパクト台超関数

Theorem ($\ell = 0$ は Lim, $\ell = 1$ は O-Y)

$\ell = 0, 1$ かつ $n \geq 2$ ならば

$$\mathrm{range}\left(\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell * \colon \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\right)$$

$$= \begin{cases} \{w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n); \hat{w}(\zeta) = 0 \text{ if } \zeta^2 = x_1^2/r^2, x_2^2/r^2, x_3^2/r^2, \dots\} & (\ell = 0), \\ \{w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n); \hat{w}(\zeta) = 0 \text{ if } \zeta^2 = 0, \tilde{x}_1^2/r^2, \tilde{x}_2^2/r^2, \tilde{x}_3^2/r^2, \dots\} & (\ell = 1), \end{cases}$$

ここで $\pm x_j$, $\pm \tilde{x}_j$ はそれぞれ $J_{n/2-1}(z)$ and $J_{n/2}(z)$ の零点 $\neq 0$.

$$\mathrm{range}\left(\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell *\right) = \left\{w; \hat{w}(\zeta) = 0 \text{ if } (\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell)^\wedge(\zeta) = 0\right\}$$

を示せばよい．なぜなら $\widehat{\delta}_{S(0,r)}(\zeta) = j_{n/2-1}(r\sqrt{\zeta^2})$,

$$\left(\partial \delta_{S(0,r)}/\partial r\right)^\wedge(\zeta) = -\frac{r\zeta^2}{n} j_{n/2}(r\sqrt{\zeta^2}).$$

17. コンパクト台超関数 2

$\ell = 1$ の場合, すなわち

$$\mathrm{range}\left(\partial\delta_{S(0,r)}/\partial r *\right) = \left\{w;\, \hat{w}(\zeta) = 0 \text{ if } (\partial\delta_{S(0,r)}/\partial r)^\wedge(\zeta) = 0\right\}$$

を示そう． 左辺 $\subset$ 右辺 は自明.

左辺 $\supset$ 右辺 を示そう．
$w \in$ 右辺 ならば, 割り算の補題より $\dfrac{\hat{w}(\zeta)}{(\partial\delta_{S(0,r)}/\partial r)^\wedge(\zeta)} = \hat{v}(\zeta)$ は

entire である．

$\partial\delta_{S(0,r)}/\partial r$ は invertible だから, invertibility (ii') より $w \in$ 左辺.

18. コンパクト台 $\mathcal{C}^\infty$ 級関数

Theorem ($\ell=0$ は Lim, $\ell=1$ は O-Y)

$\ell=0,1$ かつ $n\geq 2$ ならば

$$\mathrm{range}\left(\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell *\colon \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$$

$$=\begin{cases}\{w\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n);\, \hat{w}(\zeta)=0 \text{ if } \zeta^2=x_1^2/r^2, x_2^2/r^2, x_3^2/r^2,\dots\} & (\ell=0),\\ \{w\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n);\, \hat{w}(\zeta)=0 \text{ if } \zeta^2=0, \tilde{x}_1^2/r^2, \tilde{x}_2^2/r^2, \tilde{x}_3^2/r^2,\dots\} & (\ell=1),\end{cases}$$

ここで $\pm x_j$, $\pm\tilde{x}_j$ はそれぞれ $J_{n/2-1}(z)$ and $J_{n/2}(z)$ の零点 $\neq 0$.

$\ell=1$ の場合を示す． $w\in$ 右辺 ならば, 大きい空間 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ の中で考えて，前定理より

$w=\partial\delta_{S(0,r)}/\partial r * v$ for $\exists v\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (←このままでは大きすぎる).

invertiblity (iii) $v\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $u*v\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば $v\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

が $u=\partial\delta_{S(0,r)}/\partial r*$ について成り立つことより $v\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ である．

まとめ

1. 一般化された平均値作用素は $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell$ とのたたみこみである.
2. $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell$ のフーリエ変換は Bessel 関数で書けるので漸近挙動が分かる.
3. $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell$ は invertible である.
4. $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell *\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ が全射.
5. $\partial^\ell \delta_{S(0,r)}/\partial r^\ell *\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ も全射.
6. コンパクト台の場合 ($\ell = 0, 1$) の像は Bessel 関数の零点で記述できる.