

可積分離散非線型シュレーディンガー 方程式の漸近解析

Asymptotic analysis for the integrable
discrete nonlinear Schrödinger equation

関西(かんせい)学院大学 山根英司(ひでし)

2016年12月17日 微分方程式の総合的研究

1. 非線型 Schrödinger 方程式とソリトン

focusing NLS

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0$$

ソリトン

$$u(x, t) = 2\eta e^{2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t + i(\psi_0 + \pi/2)} \\ \times \operatorname{sech}(2\eta x - 8\xi\eta t - 2\delta_0)$$

搬送波 (exp, 振動) \times 孤立進行波 (sech)

2. 時間無限大での漸近挙動

リーズナブルな初期値に対して, $t \rightarrow \infty$ で解は 1-ソリトンたちの和に漸近する.

可積分 NLS: Fokas-Its ('96), Kamvissis ('95)

戸田格子: Krüger-Teschl ('09)

KdV: 田中俊一 ('75), Grunert-Teschl ('09)

可積分に限らず広い範囲の非線型分散型方程式で同様のことが成り立つだろうと言われている.

(**soliton resolution conjecture**)

可積分系の場合, Deift-Zhou ('93) の **nonlinear steepest descent** が現在の標準的方法

3. 可積分離散 NLS (IDNLS) 1

NLS (**focusing**) $i u_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0$

Ablowitz-Ladik ('75)

focusing な可積分離散 NLS (IDNLS)

$$i \frac{d}{dt} R_n + (R_{n+1} - 2R_n + R_{n-1}) + |R_n|^2 (R_{n+1} + R_{n-1}) = 0$$

ともに Lax 形式で書け，逆散乱法で解ける．

ともにソリトン解がある．

搬送波 (exp, 振動) × 孤立進行波 (sech)

IDNLS は可積分系では有名で，非線形光学のモデルとなるだけでなく，あちこちに現れる．

4. 可積分離散 NLS (IDNLS) 2

z_1 固有値, $|z_1| > 1$,

$C_1(0)$ 規格化定数 (norming constant)

当面はただのパラメータ. 詳しくは後で.

(明るい) ソリトン bright soliton

$BS(n, t; z_1, C_1(0))$

= (exp carrier wave) \times (sech traveling wave)

規格化定数 $C_1(0)$ を定数倍すると

\Rightarrow PHASE SHIFT in exp and sech.

ソリトンの衝突によって起きる.

5. ソリトンの具体的表示

$$z_1 = \exp(\alpha_1 + i\beta_1) \quad \alpha_1 > 0, \text{ 固有値}$$

$$\text{BS}(n, t; z_1, C_1(0)) = \frac{C_1(0)}{|C_1(0)|} \exp(-i[2\beta_1(n+1) - 2w_1t]) \\ \times \sinh(2\alpha_1) \text{sech}[2\alpha_1(n+1) - 2v_1t - \theta_1].$$

$$v_1 = -\sinh(2\alpha_1) \sin(2\beta_1), \quad w_1 = \cosh(2\alpha_1) \cos(2\beta_1) - 1,$$

$$\theta_1 = \log |C_1(0)| - \log \sinh(2\alpha_1).$$

孤立進行波 sech の速度は固有値だけで決まる .

$$\text{tw}(z_1) = \text{tw}(\exp(\alpha_1 + i\beta_1)) = \alpha_1^{-1} v_1$$

規格化定数 $C_1(0)$ を定数倍すると

⇒ PHASE SHIFT in \exp and sech .

ソリトンの衝突によって起きる.

6. ソリトンの衝突と phase shift

可積分系でよくある話．**KdV** が最も有名．

速いソリトンが遅いソリトンを追い越す．

追い越しの前も後も同じ形，同じ速度で動く．
ただし，前後にずれることがある．

6. ソリトンの衝突と phase shift

可積分系でよくある話．KdV が最も有名．

速いソリトンが遅いソリトンを追い越す．

追い越しの前も後も同じ形，同じ速度で動く．
ただし，前後にずれることがある．

このズレは規格化定数に他の定数がかかるから起きる．
 $t \rightarrow \pm\infty$ でこの定数が違うので phase shift が起きる．

phase shift を調べる

=規格化定数にかかる他の定数を調べる

6. ソリトンの衝突と phase shift

可積分系でよくある話．KdV が最も有名．

速いソリトンが遅いソリトンを追い越す．

追い越しの前も後も同じ形，同じ速度で動く．
ただし，前後にずれることがある．

このズレは規格化定数に他の定数がかかるから起きる．
 $t \rightarrow \pm\infty$ でこの定数が違うので phase shift が起きる．

phase shift を調べる

=規格化定数にかかる他の定数を調べる

今日のテーマは2つ

- 1-ソリトンの和に分かれるか． (soliton resolution)
- phase shift を記述する．

7. IDNLS と Lax 対

$$i \frac{d}{dt} R_n + (R_{n+1} - 2R_n + R_{n-1}) + |R_n|^2 (R_{n+1} + R_{n-1}) = 0 \quad (\text{IDNLS})$$

$i u_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0$ の離散版.

.....
良い非線型項 \Rightarrow Lax (AKNS) 表示

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} z & -\bar{R}_n \\ R_n & z^{-1} \end{bmatrix} X_n \quad (n\text{-part})$$

$$\frac{d}{dt} X_n = \left[\text{a complicated matrix} \right] X_n \quad (t\text{-part})$$

(IDNLS) は両立条件 $\frac{d}{dt} \underbrace{X_{n+1}}_{n\text{-part}} = \left(\frac{d}{dt} \underbrace{X_m}_{t\text{-part}} \right)_{m=n+1}$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を spectral parameter という。
固有値 はその特別な値。

8. n -part の固有関数

もし $R_n \rightarrow 0$ (rapidly) as $n \rightarrow \pm\infty$ ならば, 近似的に

$$X_{n+1} \approx \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} X_n.$$

8. n -part の固有関数

もし $R_n \rightarrow 0$ (rapidly) as $n \rightarrow \pm\infty$ ならば, 近似的に

$$X_{n+1} \approx \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} X_n.$$

固有関数

$\phi_n(z, t), \psi_n(z, t)$: 単位円 $|z| = 1$ の外部で正則, 円まで連続

$\psi_n^*(z, t)$: 単位円 $|z| = 1$ の内部で正則, 円まで連続

$$\boxed{\text{外}} \phi_n(z, t) \sim \begin{bmatrix} z^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{as } n \rightarrow -\infty,$$

$$\boxed{\text{外}} \psi_n(z, t) \sim \begin{bmatrix} 0 \\ z^{-n} \end{bmatrix}, \quad \boxed{\text{内}} \psi_n^*(z, t) \sim \begin{bmatrix} z^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

2次元の解空間に3つの解. 非自明な1次関係式がある.

9. 1次関係式

単位円 $|z| = 1$ 上で, ある $a(z), b(z) = b(z, t)$ について

$$\phi_n = b\psi_n + a\psi_n^*$$

$$a(z) \in \mathcal{O}(|z| > 1) \cap \mathcal{C}^0(|z| \geq 1),$$

$$b(z) \in \mathcal{C}^\infty(|z| = 1).$$

9. 1次関係式

単位円 $|z| = 1$ 上で、ある $a(z)$, $b(z) = b(z, t)$ について

$$\phi_n = b\psi_n + a\psi_n^*$$

$a(z) \in \mathcal{O}(|z| > 1) \cap \mathcal{C}^0(|z| \geq 1)$,

$b(z) \in \mathcal{C}^\infty(|z| = 1)$.

もし $a(z_j) = 0$ ならば $a(-z_j) = 0$.

$\{\pm z_j, \pm \bar{z}_j^{-1}\}$ を固有値の4つ組という.

ソリトンに対応する. ソリトンの速度は固有値で決まる.
 $a(z)$ と固有値は時間によらない.

10. 反射係数

$|z| = 1$ 上で, 反射係数 $r(z)$ とは

$$r(z) := \frac{b(z)}{a(z)}$$

Recall: $\psi_n \sim z^{-n} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\psi_n^* \sim z^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ as $n \rightarrow \infty$.

r の特徴付け (定義としても良い)

$$r\psi_n + \psi_n^* \sim \text{const.} \begin{bmatrix} z^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (n \rightarrow -\infty).$$

時間発展

$$r(z, t) = r(z) \exp(it(z - z^{-1})^2), \text{ where } r(z) = r(z, 0).$$

11. 散乱データと逆散乱変換

$a(z_j) = 0$ (order 1) とする.

$\pm z_j$ (単位円の外) と $\pm \bar{z}_j^{-1}$ (単位円の内) とは固有値.

$\phi_n(z_j) = b_j \psi_n(z_j)$ for some b_j .

規格化定数とは $C_j := \frac{b_j}{\frac{d}{dz}a(z_j)}$

散乱データ

$$\{(\pm z_j, \pm \bar{z}_j^{-1}, C_j)\}_{j=1}^J, \quad r(z)$$

11. 散乱データと逆散乱変換

$a(z_j) = 0$ (order 1) とする.

$\pm z_j$ (単位円の外) と $\pm \bar{z}_j^{-1}$ (単位円の内) とは固有値.

$\phi_n(z_j) = b_j \psi_n(z_j)$ for some b_j .

規格化定数とは $C_j := \frac{b_j}{\frac{d}{dz}a(z_j)}$

散乱データ

$$\{(\pm z_j, \pm \bar{z}_j^{-1}, C_j)\}_{j=1}^J, \quad r(z)$$

逆散乱変換

ポテンシャル R_n は散乱データから再構成できる.
極付き Riemann-Hilbert 問題 を解けば良い.

12. Riemann-Hilbert 問題 (RHP)

複素平面における境界値問題

Γ : 曲線 (左側が + side).

$m(z)$: 未知行列, 成分は $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ の正則関数

- 例:
1. $\Gamma = \mathbb{R}$, $m(z)$ は $\pm \text{Im } z > 0$ で正則.
 2. $\Gamma = \{|z| = 1\}$, $m(z)$ は $|z| \neq 1$ で正則.

12. Riemann-Hilbert 問題 (RHP)

複素平面における境界値問題

Γ : 曲線 (左側が + side).

$m(z)$: 未知行列, 成分は $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ の正則関数

例: 1. $\Gamma = \mathbb{R}$, $m(z)$ は $\pm \text{Im } z > 0$ で正則.

2. $\Gamma = \{|z| = 1\}$, $m(z)$ は $|z| \neq 1$ で正則.

m_+, m_- : \pm sides から Γ への境界値

RHP: $m_+ = m_- v$ on Γ (v : **given**, ジャンプ行列)

$v = I$ のときジャンプ無しで, m は正則につながる.

正規化条件 $m(z) \rightarrow I$ as $z \rightarrow \infty$.

(解の一意性を保証するため)

13. RHP は積分に似ている

RHP: $m_+ = m_-v$ on Γ 鞍点法を真似たい

13. RHP は積分に似ている

RHP: $m_+ = m_-v$ on Γ 鞍点法を真似たい

径路の変形

径路を変形し, 新しい未知関数とジャンプ行列を導入
元の RHP \Leftrightarrow 新しい RHP.

連続性

対応 $v \mapsto m$ は連続 (摂動計算の根拠)

径路の一部の除去

- もし $v = I$ (ジャンプ無し) on $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$ ならば,
 $m[\text{original}] = m[\text{with } \hat{\Gamma} \text{ deleted}]$
- もし $v \approx I$ on $\hat{\Gamma}$, $m[\text{original}] \approx m[\text{with } \hat{\Gamma} \text{ deleted}]$

14. 極付き Riemann-Hilbert 問題 (RHP)

$m(z)$: 未知行列, 成分は $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ の有理型関数

RHP: $m_+ = m_- v$ on Γ

$m(z)$ に極を許し, 留数に条件をつける.

14. 極付き Riemann-Hilbert 問題 (RHP)

$m(z)$: 未知行列, 成分は $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ の有理型関数

RHP: $m_+ = m_- v$ on Γ

$m(z)$ に極を許し, 留数に条件をつける.

逆散乱変換に使う場合, 散乱データ総登場

ジャンプ行列は反射係数で書ける.

$m(z)$ の極は固有値.

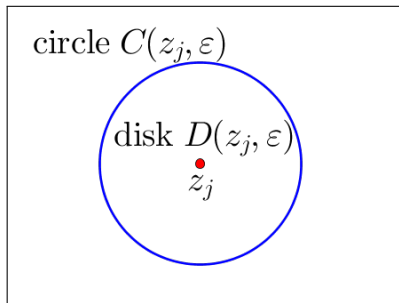
留数の条件は規格化定数で書ける.

RHP の解 $m(z)$ からポテンシャルを再構成できる.
(他の可積分系でも同様)

15. 極の 'blowup'

$$\text{Res}(m(z); z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

極における特異性を円に沿うジャンプに置き換えれば2つ前のスライドの技法が使える。「RHPは積分に似ている。」



円盤 $D(z_j, \varepsilon)$ において,
 m の特異部分を引き去る.
新しい未知関数 \hat{m} .
 z_j で正則.
 $C(z_j, \varepsilon)$ でジャンプ.

ジャンプ行列が単位行列に近ければ無視できる.
極を減らして1-ソリトンに帰着.

16. 逆散乱法で IDNLS の初期値問題を解く

散乱データの時間発展

固有値は時間によらない.

$$C_j(t) = C_j(0) \exp(it(z_j - z_j^{-1})^2),$$

$$r(z, t) = r(z) \exp(it(z - z^{-1})^2) \text{ on } |z| = 1,$$

where $r(z) := r(z, 0)$

初期値問題

初期値 $R_n(0)$ で $t = 0$ における散乱データが決まる.

$t > 0$ における散乱データが決まる.

極付き RHP を定式化.

RHP の解からポテンシャル再構成. $R_n(t)$ ($t > 0$) を得る.

17. IDNLS: 無反射 (反射係数=0) の場合

もし $r(z) = r(z, 0) = 0$ ならば $r(z, t) = 0$ for all t であり

$R_n(t) =$ 多重ソリトン.

$t \rightarrow \infty$ で 1-ソリトンたちの和に漸近する.

遅いものから順に番号をつける. 固有値に同じ番号.

PHASE SHIFT (formal proof in Ablowitz et al. '04)

各項は $BS(n, t, z_j, p_j T(z_j)^{-2} C_j(0))$

phase shift は固有値で決まる:

$$p_j := \prod_{k>j} z_k^2 \bar{z}_k^{-2}, \quad T(z_j) := \prod_{k>j} \frac{z_k^2 (z_j^2 - \bar{z}_k^{-2})}{z_j^2 - z_k^{-2}}$$

17. IDNLS: 無反射 (反射係数=0) の場合

もし $r(z) = r(z, 0) = 0$ ならば $r(z, t) = 0$ for all t であり

$R_n(t) =$ **多重ソリトン**.

$t \rightarrow \infty$ で **1-ソリトンたちの和に漸近する**.

遅いものから順に番号をつける．固有値に同じ番号．

PHASE SHIFT (formal proof in Ablowitz et al. '04)

各項は $BS(n, t, z_j, p_j T(z_j)^{-2} C_j(0))$

phase shift は固有値で決まる:

$$p_j := \prod_{k>j} z_k^2 \bar{z}_k^{-2}, \quad T(z_j) := \prod_{k>j} \frac{z_k^2 (z_j^2 - \bar{z}_k^{-2})}{z_j^2 - z_k^{-2}}$$

問題 1

反射があるときも 1-ソリトンの和に漸近するか．

問題 2

phase shift に反射はどう影響するのか．

18. 主結果: もし反射があったら

$R_n(0)$ が急減少で, いくつかの generic な仮定を満たすとき
解は 1-ソリトンたちの和に漸近する

s 番目のソリトンとともに運動する観測者から見て

$|n| < 2t$ 'timelike' な領域: **phase shift** は反射係数に依存

$$R_n(t) = \text{BS} \left(n, t; z_s, \delta(0)\delta(z_s)^{-2} p_s T(z_s)^{-2} C_s(0) \right) + O(t^{-1/2}).$$

$\delta(z)$ は $r(z)$ を含む積分.

p_s と $T(z_s)$ は z_k 's ($k \geq s$) で書ける.

$|n| \sim 2t$ 主要項は無反射のときと同じ

$$R_n(t) = \text{BS} \left(n, t; z_s, p_s T(z_s)^{-2} C_s(0) \right) + O(t^{-1/3}).$$

$|n| > 2t$ 主要項は無反射のときと同じ

$$R_n(t) = \text{BS} \left(n, t; z_s, p_s T(z_s)^{-2} C_s(0) \right) + O(n^{-k}), \quad \forall k.$$

19. timelike な領域における関数 $\delta(z)$

$|n| < 2t$ (the timelike region) において

$$A := \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 + n/t} - i\sqrt{2 - n/t} \right).$$

$$S_1 := e^{-\pi i/4} A, \quad S_2 := e^{-\pi i/4} \bar{A}, \quad S_3 := -S_1, \quad S_4 := -S_2.$$

すべて円 $|z| = 1$ の上にある.

相関数 (後述) の鞍点である.

$$\delta(z) := \exp \left(\frac{-1}{2\pi i} \left[\int_{S_1}^{S_2} + \int_{S_3}^{S_4} \right] (\tau - z)^{-1} \log(1 + |r(\tau)|^2) d\tau \right)$$

積分路は弧 $\subset \{|z| = 1\}$.

$\delta(z)$ は反射係数で決まる.

無反射のとき $\delta(z) \equiv 1$

20. 極付き Riemann-Hilbert 問題

$m_+(z) = m_-(z)v(z)$ on 単位円 $|z| = 1$

$$v(z) = \begin{bmatrix} 1 + |r(z)|^2 & e^{-2\varphi}\bar{r}(z) \\ e^{2\varphi}r(z) & 1 \end{bmatrix} \text{ ジャンプ行列}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}it(z - z^{-1})^2 - n \log z \quad \text{相関数!}$$

非線型フーリエ・ラプラス解析みたいな感じ。

$m(z)$ の極（固有値）における留数には規格化定数で書ける条件を課す。

ポテンシャル再構成公式 $R_n(t) = - \left. \frac{d}{dz} m(z)_{21} \right|_{z=0}$

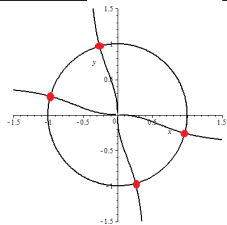
初期値問題が解ける． 漸近展開も分かる． 鞍点法を真似る．

21. 領域によって挙動が違うのは何故か

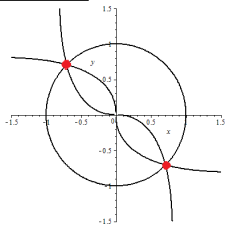
$$\varphi = \frac{1}{2}it(z - z^{-1})^2 - n \log z \quad \text{相関数}$$

曲線 $\text{Re } \varphi(z) = 0$ は単位円 $|z| = 1$ を含む．赤丸は停留点．

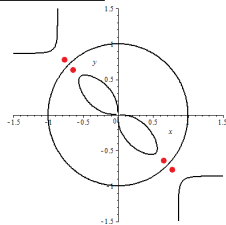
$$|n| < 2t$$



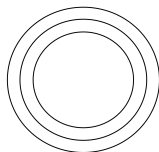
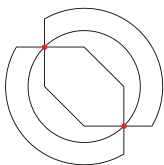
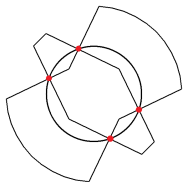
$$|n| = 2t$$



$$|n| > 2t$$



上図の $\text{Re } \varphi(z) = 0$ と極を避けて steepest descent path



References

- Ablowitz M.J., Prinari B., Trubatch A.D., Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems, 2004.
- Deift P., Zhou X., A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation, (1993)
- P. Deift, S. Kamvissis, T. Kriecherbauer and X. Zhou, The Toda rarefaction problem, (1996).
- K. Grunert and G. Teschl, Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent, (2009).
- Yamane H., Long-time asymptotics for the **defocusing** integrable discrete nonlinear Schrödinger equation, (2014), II (2015)

御清聴ありがとうございました.

Yamane H., Long-Time Asymptotics for the integrable discrete nonlinear Schrödinger equation: the focusing case,
arXiv:1512.01760

このスライドは

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~yamane>
に置きます.

24.

以下は質問に答えるための 詳細

たくさんある極を4つまで減らす。
つまり、ソリトン一つに話に帰着する。

観測者はソリトンを追いかける。
「自分」より遅いものは単に無視。
「自分」より速いものの影響を計算。

25. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$ は第 j ソリトンの速度, 遅いものから順に番号.

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

25. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$ は第 j ソリトンの速度, 遅いものから順に番号 .

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

第 s ソリトンを追いかける観測者: $n/t \approx \text{tw}(z_s)$

25. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$ は第 j ソリトンの速度，遅いものから順に番号．

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

第 s ソリトンを追いかける観測者: $n/t \approx \text{tw}(z_s)$

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) < 0 \Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$ 指数減少 .

25. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$ は第 j ソリトンの速度, 遅いものから順に番号.

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

第 s ソリトンを追いかける観測者: $n/t \approx \text{tw}(z_s)$

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) < 0 \Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$ 指数減少.

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) > 0$

$\Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$ 指数増大, 逆数で置き換えるトリックあり.

うまく未知関数を取り替えれば良い.

25. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$ は第 j ソリトンの速度, 遅いものから順に番号.

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

第 s ソリトンを追いかける観測者: $n/t \approx \text{tw}(z_s)$

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) < 0 \Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$ 指数減少.

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) > 0$

$\Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$ 指数増大, 逆数で置き換えるトリックあり.

うまく未知関数を取り替えれば良い.

$\pm z_s, \pm \bar{z}_s^{-1}$ 以外の極は除去できる.

未知関数の変換により $C_s(t)$ に $p_s T(z_s)^{-2}$ がかかる.

$$p_s := \prod_{j>s} z_j^2 \bar{z}_j^{-2}, \quad T(z_s) := \prod_{j>s} \frac{z_j^2 (z_s^2 - \bar{z}_j^{-2})}{z_s^2 - z_j^{-2}}$$

26. reduction の方針

下の論文の方法を使う .

P. Deift, S. Kamvissis, T. Kriecherbauer and X. Zhou, The Toda rarefaction problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **49**(1) (1996), 35-83.

KdV に適用した例

K. Grunert and G. Teschl, Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent, *Math. Phys. Anal. Geom.* **12**(3) (2009)

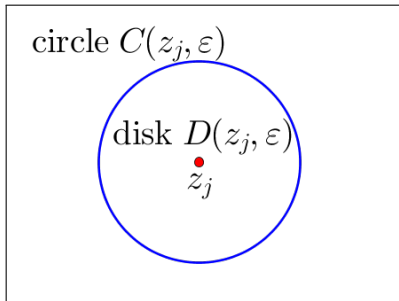
極の 4 つ組がたくさん, $r(z) \neq 0$

- > じゃまな極を 'blowup' (4 つ組を一組だけ残す)
- > 極除去 (遅いソリトンに対応するもの), $r(z) \neq 0$
- > 極除去 (速いソリトンに対応するもの),
極の 4 つ組が一組だけ残る, $r(z) \neq 0$
- > 極の 4 つ組が一組だけ, 無反射: 1-ソリトン (BS)

27. 'blowup'

$$\text{Res}(m(z); z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

極における特異性を**円**に沿う不連続性に置き換える.



円盤 $D(z_j, \varepsilon)$ において,
 m の特異部分を引き去る.
新しい未知関数 \hat{m} .

z_j で正則.

$C(z_j, \varepsilon)$ で不連続

28. 'blowup' 2

$$\text{Res}(m(z); z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

$m(z)$ の第 1 列の留数 = $z_j^{-2n} C_j(t) \times (m(z)$ の第 2 列)

$$m(z) \text{ の第 1 列} = \frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z - z_j} \times m(z) \text{ の第 2 列} \pmod{\mathcal{O}_{z_j}}$$

円盤 $D(z_j, \varepsilon)$ で $\hat{m}(z) := m(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z - z_j} & 1 \end{bmatrix}$ と置く .

z_j で正則 ← 特異性を除去
 $C(z_j, \varepsilon)$ に沿ってジャンプあり.

29. 非対角成分

定義 (blowup)

$$\hat{m}(z) := m(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ in } D(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円盤)}$$

blowup 後の方程式

$$\hat{m}_+(z) = \hat{m}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ on } C(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円)}$$

29. 非対角成分

定義 (blowup)

$$\hat{m}(z) := m(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ in } D(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円盤)}$$

blowup 後の方程式

$$\hat{m}_+(z) = \hat{m}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ on } C(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円)}$$

$t \rightarrow \infty$ のときジャンプ行列は?

- $z_j^{-2n} C_j(t)$ が指数減少ならば, 単位行列に収束する.
自分 (観測者) より遅いソリトンは無視できる.
- $z_j^{-2n} C_j(t)$ が指数増大 (速いソリトン) ならば難しい.

29. 非対角成分

定義 (blowup)

$$\hat{m}(z) := m(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ in } D(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円盤)}$$

blowup 後の方程式

$$\hat{m}_+(z) = \hat{m}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ on } C(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円)}$$

$t \rightarrow \infty$ のときジャンプ行列は?

- $z_j^{-2n} C_j(t)$ が指数減少ならば, 単位行列に収束する.
自分 (観測者) より遅いソリトンは無視できる.
- $z_j^{-2n} C_j(t)$ が指数増大 (速いソリトン) ならば難しい.

$\pm z_j$ に加えて $\pm \bar{z}_j^{-1}$ についても同様.

30. 観測者より速いソリトンの取り扱い

一般的設定で記述: 径路は Γ とし, $z_j^{-2n}C(t)$ を A と書く.
 A が大きいとき, 円に沿うジャンプが大きい.

$$M_+(z) = M_-(z)V(z) \quad \text{on } \Gamma,$$

$$M_+(z) = M_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A}{z \mp z_0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm z_0, \varepsilon),$$

$$M_+(z) = M_-(z) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{z}_0^{-2} \bar{A}}{z \mp \bar{z}_0^{-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm \bar{z}_0^{-1}, \varepsilon),$$

$$M(z) \rightarrow I \quad \text{as } z \rightarrow \infty.$$

30. 観測者より速いソリトンの取り扱い

一般的設定で記述: 径路は Γ とし, $z_j^{-2n}C(t)$ を A と書く.
 A が大きいとき, 円に沿うジャンプが大きい.

$$M_+(z) = M_-(z)V(z) \quad \text{on } \Gamma,$$

$$M_+(z) = M_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A}{z \mp z_0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm z_0, \varepsilon),$$

$$M_+(z) = M_-(z) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{z}_0^{-2}\bar{A}}{z \mp \bar{z}_0^{-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm \bar{z}_0^{-1}, \varepsilon),$$

$$M(z) \rightarrow I \quad \text{as } z \rightarrow \infty.$$

A (大) を $1/A$ (小) で置き換えるには?

31. 観測者より速いソリトンの取り扱い 2

$$R(z, z_0) := \frac{z_0^2(z^2 - \bar{z}_0^{-2})}{z^2 - z_0^2}. \text{ phase shift formula に出てくる量.}$$

31. 観測者より速いソリトンの取り扱い 2

$$R(z, z_0) := \frac{z_0^2(z^2 - \bar{z}_0^{-2})}{z^2 - z_0^2}. \text{ phase shift formula に出てくる量.}$$

上の RHP は下のと同値 (by 未知関数の変換)

$$\tilde{M}_+(z) = \tilde{M}_-(z)D(z)^{-1}V(z)D(z) \quad \text{on } \Gamma,$$

$$D(z) := \begin{bmatrix} R(z, z_0)^{-1} & 0 \\ 0 & R(z, z_0) \end{bmatrix}, \quad \text{on } \Gamma,$$

$$\tilde{M}_+(z) = \tilde{M}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & -R(z, z_0)^2 \frac{z \mp z_0}{A} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm z_0, \varepsilon),$$

$$\tilde{M}_+(z) = \tilde{M}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ -R(z, z_0)^{-2} \frac{z \mp \bar{z}_0^{-1}}{\bar{z}_0^{-2} \bar{A}} & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm \bar{z}_0^{-1}, \varepsilon),$$

$$\tilde{M}(z) \rightarrow I \quad \text{as } z \rightarrow \infty.$$

A は分母に移った!

32. 観測者より速いソリトンの取り扱い 3

前ページで使った変換は $\tilde{M}(z) = \text{diag}(z_0^2, z_0^{-2})M(z)D(z)$

$$D(z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{z \mp z_0}{A} \\ \frac{A}{z \mp z_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(z, z_0)^{-1} & 0 \\ 0 & R(z, z_0) \end{bmatrix} & \text{in } D(\pm z_0, \varepsilon), \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{z}_0^{-2} \bar{A}}{z \mp \bar{z}_0^{-1}} \\ -\frac{z \mp \bar{z}_0^{-1}}{\bar{z}_0^{-2} \bar{A}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(z, z_0)^{-1} & 0 \\ 0 & R(z, z_0) \end{bmatrix} & \text{in } D(\pm \bar{z}_0^{-1}, \varepsilon), \\ \begin{bmatrix} R(z, z_0)^{-1} & 0 \\ 0 & R(z, z_0) \end{bmatrix} & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

$\pm z_0$ と $\pm \bar{z}_0^{-1}$ は除去可能特異点である.

33. 観測者より速いソリトンの取り扱い 4

上の話に (blowup せずに残しておいた) 極が加わったら?
観測者が追いかけているソリトンの分の極だけ残してある.
観測者より速いものと遅いものは消す.

$$\text{Res}(M(z); \pm p) = \lim_{z \rightarrow \pm p} M(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p^{-2n} C & 0 \end{bmatrix}$$

とし, $\pm \bar{p}^{-1}$ でも同様とする.

33. 観測者より速いソリトンの取り扱い 4

上の話に (blowup せずに残しておいた) 極が加わったら?
観測者が追いかけているソリトンの分の極だけ残してある。
観測者より速いものと遅いものは消す。

$$\text{Res}(M(z); \pm p) = \lim_{z \rightarrow \pm p} M(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p^{-2n} C & 0 \end{bmatrix}$$

とし, $\pm \bar{p}^{-1}$ でも同様とする。

新しい未知関数 $\tilde{M}(z)$ が満たすべき条件は

$$\text{Res}(\tilde{M}(z); \pm p) = \lim_{z \rightarrow \pm p} \tilde{M}(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p^{-2n} \tau C & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau = R(\pm p, z_0)^{-2} = \left(\frac{p^2 - z_0^2}{z_0^2(p^2 - \bar{z}_0^{-2})} \right)^2,$$

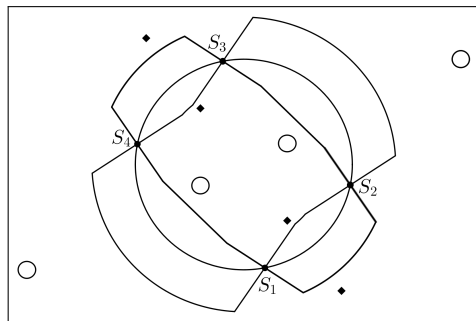
正規化係数 C が τ 倍された。

これが phase shift formula の由来である。

34. 反射係数の影響

j 's with $n/t - \text{tw}(z_j) \neq 0$ について, blowup と逆数の方法を適用. ほとんどの極は小さい円に置き換わる. そこでのジャンプは無視できる.

もし $n/t - \text{tw}(z_s) \approx 0$ ならば, $\pm z_s, \pm \bar{z}_s^{-1}$ は残る.



○ もともとの径路 $|z|=1$
を变形する.

(nonlinear
steepest descent)

$|n| < 2t$ ならば

4つの

鞍点が $|z|=1$ 上にある.

極 4 つで無反射の場合 (1-ソリトン) に帰着できる.

35. 領域によって挙動が違うのはなぜ?

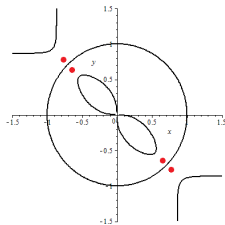
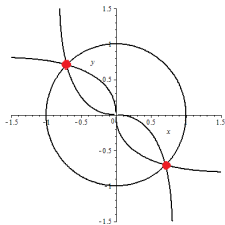
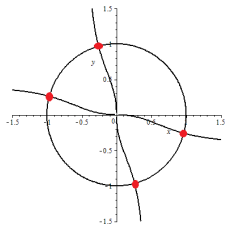
$$\varphi = \frac{1}{2}it(z - z^{-1})^2 - n \log z \quad \text{相関数}$$

曲線 $\text{Re } \varphi(z) = 0$ は original RHP の径路 $|z| = 1$ を含む .
赤丸は鞍点または高次の停留点 (真ん中の図)

$|n| < 2t$ (鞍点)

$|n| = 2t$

$|n| > 2t$ (鞍点)



左端の場合, 未知関数の変換のため $\delta(z)$ を導入.

反射係数を含む積分 (鞍点から鞍点への円弧に沿う) で定義される .

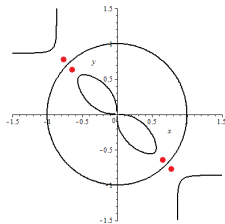
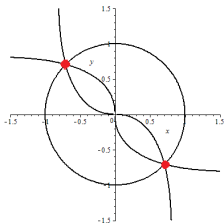
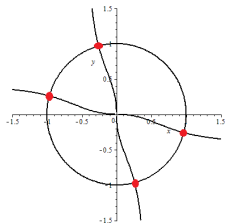
36. 曲線 $\operatorname{Re}\varphi(z) = 0$ と新しい径路

曲線 $\operatorname{Re}\varphi(z) = 0$ RHP の径路 (単位円) を含む .

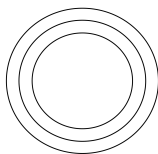
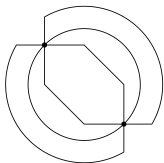
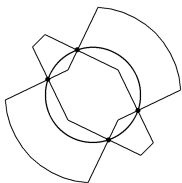
$|n| < 2t$ (鞍点)

$|n| = 2t$

$|n| > 2t$ (鞍点)



単位円を変形 . $\operatorname{Re}\varphi(z) = 0$ と極 (4 個) を避ける (最急降下)



References

- Ablowitz M.J., Prinari B., Trubatch A.D., Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems, 2004.
- Deift P., Zhou X., A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation, (1993)
- P. Deift, S. Kamvissis, T. Kriecherbauer and X. Zhou, The Toda rarefaction problem, (1996).
- K. Grunert and G. Teschl, Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent, (2009).
- Yamane H., Long-time asymptotics for the **defocusing** integrable discrete nonlinear Schrödinger equation, (2014), II (2015)

御清聴ありがとうございました.

Yamane H., Long-Time Asymptotics for the integrable discrete nonlinear Schrödinger equation: the focusing case,
arXiv:1512.01760

このスライドは

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~yamane>
に置きます.