2006年大学入試問題から積分に関するものをいくつか解説する．関学の問題の解説は山根英司の個人的見解である．参照する定理, 例題等は全て『高校生のための逆引き微分積分』のものである．

$xe^x \sin x$ の不定積分 (関西学院大)

$f(x) = e^x \sin x$ ，$g(x) = e^x \cos x$ (e は自然対数の底) とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ と $\displaystyle\int g(x)dx$ を求めよ．

(2) 部分積分法を利用して不定積分 $\displaystyle\int xf(x)dx$ を求めよ．

(3) 曲線 $y = xf(x)$ ($0 \leqq x \leqq \pi$) と x 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めよ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{4}\right)$ と x 軸および直線 $x = \dfrac{3\pi}{4}$ で囲まれる部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(1) どの本にでも載っている超有名問題である．『高校生のための逆引き微分積分』では p.121 にある．

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C_1$$
$$\int g(x)dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x) + C_2$$
$$(C_1, C_2 \text{は積分定数})$$

である (C_1, C_2 は積分定数)．なお,

$$F(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2}, \quad G(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2}$$

とおけば

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x)dx = G(x) + C_2$$

である (見通しよく計算するためには記号を導入して式を短くするのが良い.)

(2) まず部分積分法により

$$\int xf(x)dx = \int xF'(x)dx = xF(x) - \int F(x)dx$$

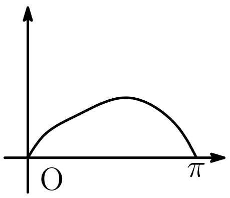
である．この式に

$$\int F(x)dx = \int \frac{f(x)-g(x)}{2}dx = \frac{F(x)-G(x)}{2} - C_3$$

を代入すれば

$$\begin{aligned}\int xf(x)dx &= xF(x) - \frac{F(x)-G(x)}{2} + C_3 \\ &= \frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^x\cos x + C_3\end{aligned}$$

となる (C_3 は積分定数).
注: 本問に限らず，不定積分の問題では, 微分して本当に元に戻るか確かめることを勧める.
(3) $x = 0, \pi$ で $y = 0$ となり，$0 \leqq x \leqq \pi$ では $y > 0$ である．だから下図のようになる．**下図はずいぶんいい加減だが, これで十分である**($xf(x)$ を微分すれば, 原点での接線の傾きが 0 であることが判る. だから下図はおかしい. それでも本問を解くには差し支えないのである. 多くの参考書に載っている図は, 正確すぎて本当に調べるべきことが何なのか判らなくなっている).



上の (2) の結果を使って

$$S = \int_0^{\pi} xf(x)dx = \left[\frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^x\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\{e^{\pi}(\pi - 1) - 1\}$$

(4) p.42 定理 12 と (2) の結果より

$$V = 2\pi\int_0^{3\pi/4} xf(x)dx = \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi^2 e^{3\pi/4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi e^{3\pi/4} - \pi$$

なお，もし定理 12 を知らないならば，pp. 66–67 と同様の計算をする．つまり始め y の積分で書く．次に $y = f(x), dy = f'(x)dx$ と置換し, x について部分積分すればよい. $f(x)$ が単調増加になるように $3\pi/4$ という数値を選んだのである. 実際 $0 < x < 3\pi/4$ で

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

なので $f(x)$ は単調増加である.

超高校級の補足　(1) がオイラーの公式から出ることは pp.179–180 に書いた. ここでは オイラーの公式を使って (2) を解く.

$$e^x \cos x + ie^x \sin x = e^x(\cos x + i \sin x) = e^x e^{ix} = e^{x+ix} = e^{(1+i)x}$$

なので $xe^{(1+i)x}$ の実部が $xe^x \cos x$ であり, 虚部が $xe^x \sin x$ である.

一般に複素数 $\alpha \neq 0$ について, 部分積分法により

$$\int xe^{\alpha x}dx = \int x\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' dx = x\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \int \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}dx = \frac{xe^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + C$$

が成り立つ. α が実数なら高校生もよく知っている計算である.

そこで $\alpha = 1 + i$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\int xe^{(1+i)x}dx = \frac{xe^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2} + C \\
&= \frac{xe^x(1-i)(\cos x + i \sin x)}{2} - \frac{e^x(1-i)^2(\cos x + i \sin x)}{2^2} \\
&= \frac{xe^x(\sin x + \cos x) - e^x \sin x}{2} + i\frac{xe^x(\sin x - \cos x) + e^x \cos x}{2} + C
\end{aligned}$$

実部・虚部をとって

$$\int xe^x \cos x = \frac{xe^x(\sin x + \cos x) - e^x \sin x}{2} + C_4$$
$$\int xe^x \sin x = \frac{xe^x(\sin x - \cos x) + e^x \cos x}{2} + C_5$$

$e^{-\sqrt{x}}$ を含む積分 (早大教育)

定積分 $\displaystyle\int_4^{16} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx$ の値は $\boxed{}$ である．

e の指数 $-\sqrt{x}$ が嫌なので $-\sqrt{x}=t$ とおく ($\sqrt{x}=t$ でも大して変わらない)．指数関数の前にある $\sqrt{x}$ があるが，これを見て方針を立てるのではない．あくまでも指数関数を見て方針を決める (注を参照).

$x=t^2$ として置換積分 B 型を使うと $x=2tdt$ で

$$\int_{x=4}^{x=16} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,\underline{dx} = \int_{t=-2}^{t=-4} (-t)e^t \cdot \underline{2tdt} = 2\int_{-4}^{-2} t^2e^tdt$$

ここまでくればp.58 例題 16 を使うだけである.

$$\int_{x=4}^{x=16} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\big[(t^2-2t+2)e^t\big]_{-4}^{-2} = \frac{20}{e^2}-\frac{52}{e^4}$$

注 同じ方針 $-\sqrt{x}=t$ によって

$$\int (-\sqrt{x}\,)^n e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\int t^{n+1}e^tdt$$

となり，p.58 にあるように部分積分を繰り返せば，この不定積分が求められる. 例えば $n=2$ なら $\displaystyle\int xe^{-\sqrt{x}}\,dx$ が求められることになる. この場合, 指数関数の方を見ないと適切な方針を立てることが出来ない. x 倍の方を見ていてもどうすればいいか判らない.

別解 $-\sqrt{x}=t$ で置換積分 A 型を使う. $-\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dt$ である．式を書くときは $-\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ を先に書いて, 後はこれに合わせて調整して後で書く.

$$\begin{aligned}\int_{x=4}^{x=16} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx &= \int_{x=4}^{x=16} \underbrace{-2xe^{-\sqrt{x}}}_{\text{後で書く}}\cdot\underbrace{\left(-\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right)}_{\text{先に書く}}\\ &= \int_{t=-2}^{t=-4} -2t^2e^t\,dt\end{aligned}$$

入れ子になった対数関数 (慶応大理工)

定積分 $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{\log(\log x)}{x\log x}\,dx$ の値は $\boxed{}$ である.

一気に答えを見通すのは到底不可能なので, とりあえず出来ることからやっていく.

第 4 章 (指数関数と対数関数) p.73 例題 24 の定石に従って $\log x = t$ とおけばよい. 特にこの例題の J, K は本問の原型というべき問題である.

第 8 章 (分数式) で, まず分母を簡単にしようということを述べた. 分母を簡単にするには, 上で述べた第 4 章の方針で $\log x = t$ とおけばよい.

分母を簡単にしようと書いた根拠を思い出そう. 分子が少々複雑でもどうということはないが, 分母が複雑なのはとても困るというのが根拠だった. だから大元の方針は, 一番始末におえないところを何とかするということである. 多くの場合 ($\fallingdotseq$ いつでも) は分母に注目するということになる. さて本問の場合は, 分子・分母を比べると分子のほうがずっと複雑である. だから分子に注目して方針を立てようと考えてもよい. それでもやはり $\log x = t$ とおくことになる.

結局どの立場からも $\log x = t$ という置換に行き着く.

$I = \displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x\log x}\,dx$ とおく.

$\log x = t$ を $x = e^t$ と書き換えて置換積分 B 型を使う. $dx = e^t dt$ なので

$$I = \int \frac{\log t}{e^t t}\cdot e^t dt = \int \frac{\log t}{t} dt = \frac{1}{2}(\log t)^2 + C$$

となる. 最後の等号は例題 24 の J による. 以上より

$$I = \frac{1}{2}\bigl\{\log(\log x)\bigr\}^2 + C$$

したがって

$$\int_e^{e^e} \frac{\log(\log x)}{x\log x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\bigl\{\log(\log x)\bigr\}^2\right]_e^{e^e} = \frac{1}{2}$$

別解 置換積分 A 型で解くなら $\log x = t$ より $\dfrac{dx}{x} = dt$ となって

$$\int \frac{\log(\log x)}{x\log x}\,dx = \int \underbrace{\frac{\log(\log x)}{\log x}}_{\text{後で}}\cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{\text{先に}} = \int \frac{\log t}{t}\cdot dt$$

となってやはり例題 24 に帰着する.

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (早大理工)

$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_0(x) = e^x,\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$$

によって定める．以下の問に答えよ．

(1) $n \geqq 1$ に対して $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x)$ を示せ．

(2) $n \geqq 1$ とする．$x \geqq 0$ に対して，不等式 $0 \leqq f_n(x) \leqq \frac{x^n}{n!}e^x$ を示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} f_n(1)$ を求めよ．

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ が目標であり, 実際この式は (2) で $x = 1$ とおいた式と (3) とから直ちに出る．$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ は p.60 大学入試問題 2 で扱った*．しかし，この早大の問題の解法はむしろ p.52 例題 12 の解法に近く，カギになるのは

$$\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \quad (k \geqq 1 \text{ のとき}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

という事実である．これは大学でテイラーの定理を学ぶときに重要になるからしっかり覚えておこう．大学入試専用の瑣末な知識ではない．

　もうひとつ重要なのは次の事実である: 任意の関数 $p(t)$ と定数 a について

$$q(x) = \int_a^x p(t)\,dt$$

とおくと，

$$q(a) = 0, \quad q'(x) = p(x)$$

が成り立つ．本問の場合は

$$f_n(0) = 0,\ f'_{n+1}(x) = f_n(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

---

*p.197 も参照

(1) $g_n(x) = -e^x + 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x)$ とおき，$g_n(x) = 0$ を示そう．

(i) $n = 1$ の場合を調べる．$g_1'(x) = -(e^x)' + f_1'(x) = -e^x + f_0(x) = 0$ だから $g_1(x)$ は定数である．そして $g_1(0) = -e^0 + 1 = 0$ だから，その定数とは 0 である．ゆえに，常に $g_1(x) = 0$ つまり $n = 1$ の場合が成り立つ．

(ii) ある n について $g_n(x) = 0$ が成り立つとする．このとき ??, ?? より

$$\begin{aligned} g_{n+1}'(x) &= \left(-e^x + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)' + f_{n+1}'(x) \\ &= -e^x + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x) \\ &= g_n(x) = 0 \quad (\text{最後の等号は帰納法の仮定による}) \end{aligned}$$

なので $g_{n+1}(x)$ は定数である．その定数は

$$g_{n+1}(0) = -e^0 + 1 + f_{n+1}(0) = -1 + 1 + 0 = 0$$

である．したがって $g_{n+1}(x) = 0$ が成り立ち，帰納法が進む．

(2) $f_n(x) \geqq 0$ は帰納法により明らかである．

$f_n(x) \leqq \dfrac{x^n}{n!}e^x$ を示そう．$h_n(x) = f_n(x) - \dfrac{x^n}{n!}e^x$ とおく．$x \geqq 0$ で $h_n(x) \leqq 0$ であることを帰納法で示そう (本当は $n = 0$ から始める方が見通しが良い．pp.63–64 の注の最後の段落を参照せよ)．

(i) $n = 1$ の場合を調べる．$x \geqq 0$ で

$$h_1'(x) = f_1'(x) - (xe^x)' = e^x - (xe^x + e^x) = -xe^x \leqq 0$$

だから $h_1(x)$ は単調減少である．また，$h_1(0) = 0$ である．よって $x \geqq 0$ で $h_1(x) \leqq 0$

(ii) ある n について $h_n(x) \leqq 0$ とする．こう仮定すると

$$\begin{aligned} h_{n+1}'(x) &= f_{n+1}'(x) - \left(\frac{x^n}{n!}e^x\right)' = f_n(x) - \left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n}{n!}e^x\right\} \\ &= h_n(x) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x \leqq 0 \end{aligned}$$

であり，$h_{n+1}(x)$ は $x \geqq 0$ で単調減少である．このことと $h_{n+1}(0) = 0$ より，$h_{n+1}(x) \leqq 0$ が判る．これで帰納法が進む．

(3)　上の (2) で $x = 1$ とおいて，はさみうちの原理より，答えは 0.

指数関数の分数式と逆関数 (東大)

$x > 0$ を定義域とする関数 $f(x) = \dfrac{12(e^{3x} - 3e^{x})}{e^{2x} - 1}$ について，以下の問いに答えよ．
(1) 関数 $y = f(x)\,(x > 0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ．すなわち，任意の実数 a に対して $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ 1 つ存在することを示せ．
(2) 前問 (1) で定められた逆関数を $y = g(x)\,(-\infty < x < \infty)$ とする．このとき，定積分 $\displaystyle\int_{8}^{27} g(x)dx$ を求めよ．

(1) 示すべきことは次の 2 つである:

（ア） $y = f(x)$ が $x > 0$ で単調増加であること．

（イ） $y = f(x)$ のとりうる値の範囲が $-\infty < y < \infty$ であること．

$e^x = t$ とおくと，$f(x) = \dfrac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1}\left(= h(t) \text{ とおく}\right)$ が成り立つ．つまり $h(e^x) = f(x)$ である．(ア)(イ) はそれぞれ次のように書き換えられる:

（ウ） $s = h(t)$ が $t > 1 = e^0$ で単調増加であること．

（エ） $s = h(t)\,(t > 1)$ のとりうる値の範囲が $-\infty < s < \infty$ であること．

分数式は分母が 0 にならないか心配である．しかし，今の場合そうなるのは $t = \pm 1$ であって， $t > 1$ なら (すれすれのところで) 分母の零点を避けている．だから $h(t)$ は $t > 1$ で確かに定義されて明らかに連続かつ微分可能である (大学数学の用語を使えば C^{∞} 級である)．
まず (エ) から証明する．

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \infty$$

は易しい．また，$t \to 1 + 0$ の右側極限値について

$$\lim_{t \to 1+0} h(t) = -\infty$$

が成り立つ．分母 $\to +0$, 分子 $\to -2$ だからである．
連続性より (エ) が従う (中間値の定理)．

次に (ウ) を示したい．$h'(t) > 0$ を示せばよい．分数式の微分の計算は複雑になりがちなので工夫したい．今の場合, 分子の次数が高すぎるので割り算しておくと微分が楽になりそうだ (『逆引き微分積分』p.17 参照)．実は今は関数の形が特殊で, 割り算だけでなくて部分分数分解すれば後の計算が楽になる．

$$h(t) = 12\left(t - \frac{2t}{t^2-1}\right) = 12\left(t - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$$

なので

$$h'(t) = 12\left\{1 + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2}\right\} > 0$$

である．これで (ウ) が示された．

(2)　求める積分を I とする．x, y が入れ替わるとややこしいので (1) に合わせよう．

$$I = \int_8^{27} g(y)dy$$

である (ちょっとずるい?)．$y = f(x)$ によって置換積分した後で部分積分する (『逆引き微分積分』pp.66-67 参照)．$g(y) = g(f(x)) = x, \quad dy = f'(x)dx$ であり,

$$I = \int_{y=8}^{y=27} g(y)dy = \int_{x=g(8)}^{x=g(27)} xf'(x)dx$$

となる．$g(8)$ は $f(y) = 8$ の正の解である．$h(t) = 8$ の 1 より大きい解が $t = 2$ なので $g(8) = \log 2$. 同様に $g(27) = \log 3$. 部分積分により

$$\begin{aligned} I &= \int_{\log 2}^{\log 3} xf'(x)dx = [xf(x)]_{\log 2}^{\log 3} - \int_{\log 2}^{\log 3} f(x)dx \\ &= 27\log 3 - 8\log 2 - \int_{\log 2}^{\log 3} f(x)dx \end{aligned}$$

ここで $f(x) = h(e^x)$ に注目して $e^x = t$ とおいて置換積分する．$e^x dx = dt$ な

ので

$$\begin{aligned}
&\int_{x=\log 2}^{x=\log 3} f(x)dx = \int_{x=\log 2}^{x=\log 3} \frac{h(e^x)}{e^x}\cdot \underline{e^x dx} = \int_{t=2}^{t=3} \frac{h(t)}{t}\underline{dt} \\
&= \int_2^3 12\left(1-\frac{2}{t^2-1}\right)dt = \int_2^3 12\left(1+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt \\
&= 12\left[t+\log(t+1)-\log(t-1)\right]_2^3 = 12(1+\log 2-\log 3)
\end{aligned}$$

以上より

$$I = 39\log 3 - 20\log 2 - 12$$

なお，このサポートページにある「逆関数の積分」も参照してください.