2005年大学入試問題から積分に関するものをいくつか解説する．

斜めの軸の回転体の体積(関西学院大)

座標空間において, 直線 ℓ は原点 O を通り，$\vec{v}=(1,1,1)$ に平行とする．また，2 点 $\mathrm{P_0}(-1,2,z)$，$\mathrm{P_1}(5,0,1)$ を考える．線分 $\mathrm{OP_0}$ は直線ℓ に垂直とする．このとき次の問いに答えよ．
(1) z の値を求めよ．
(2) 線分 $\mathrm{P_0P_1}$ を $s:(1-s)$(ただし,$0\leqq s\leqq 1$) に内分する点を P とする．ℓ 上の点 Q を，直線 ℓ と線分PQ が垂直になるように定める．このときの Q の座標，および線分PQ の長さ $\overline{\mathrm{PQ}}$ を求めよ．
(3) $\overline{\mathrm{OQ}}=t$ とおく． s を t で表せ．
(4) $s=1$ のときの Q を $\mathrm{Q_1}$ と表すとき，線分$\mathrm{OP_0}$，$\mathrm{P_0P_1}$，$\mathrm{P_1Q_1}$ をそれぞれ ℓ の周りに回転してできる図形で囲まれた部分を D とする．Q を通り ℓ に垂直な平面で D を切ったとき, 断面積 A を t で表せ．
(5) D の体積 V を求めよ．

計算技術の面では特別難しいことはなく，2次関数を積分するだけである．本問が難しいのは体積と積分の**概念**を正しく把握していなければならないところである．

簡単のために直方体の体積を考えよう．もちろん横, 奥行き, 高さを測って掛け合わせればよい．このときに横と奥行きは cm で測って高さだけインチで測ったら計算が狂ってしまう．cm なら cm で (インチならインチで) 統一しなければならない．本問が問うているのはこういうことである．

以下, 空間図形が苦手な人はペンを線分 $\mathrm{P_0P_1}$ とし，机のへりを直線 ℓ として簡単な模型を作って考えるとよい．

(1) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=0$ なので $-1+2+z=0$. よって $z=-1$.

(2) まず$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}+s\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}+s\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}$ である．また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\vec{v}$ とおける．, このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=u\vec{v}-s\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$$

よって $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ より $u|\vec{v}|^2-s\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}-\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=0$ となる．ここで $|\vec{v}|^2=3$, $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=0$ であり，また，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}=(6,-2,2)$ だから$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}=6$ である．以上より $3u-6s=0$. よって $u=2s$ なので $\mathrm{Q}(2s,2s,2s)$.

これと $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-1+6s,2-2s,-1+2s)$ より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-1+4s,2-4s,-1)$ であり，$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-1+4s)^2+(2-4s)^2+(-1)^2}=\sqrt{32s^2-24s+6}$ である．

(3) (2) より，$t=2s|\vec{v}|=2\sqrt{3}s$ なので $s=\dfrac{t}{2\sqrt{3}}$.

(4) 回転体を回転軸に垂直な平面で切るのだから切り口は円である．中心は Q, 半径は $\overline{\mathrm{PQ}}$ である．面積は

$$A=\pi\overline{\mathrm{PQ}}^2=\pi(32s^2-24s+6)=\pi\left(\frac{8t^2}{3}-\frac{12t}{\sqrt{3}}+6\right)$$

(5) 断面積 A を回転軸方向の長さ t に関して O から Q_1 まで, つまり $t=0$ から $t=2\sqrt{3}(\Leftrightarrow s=1)$ まで積分すればよい.

$$V=\int_0^{2\sqrt{3}}\pi\left(\frac{8t^2}{3}-\frac{12t}{\sqrt{3}}+6\right)dt=\pi\left[\frac{8t^3}{9}-\frac{6t^2}{\sqrt{3}}+6t\right]_0^{2\sqrt{3}}=\frac{28\sqrt{3}\pi}{3}$$

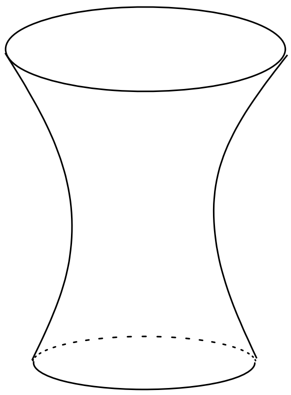
である．

なお，座標 x,y,z が cm とすると s は (インチではないけれど) 何か別の単位であって, $\int A ds$ だと cm^3 にはならない．しかし t なら cm^3 になる．s のままで計算するには, $t=2\sqrt{3}s$ より $dt=2\sqrt{3}ds$ で, 置換積分により

$$V=\int_{s=0}^{s=1}A\cdot 2\sqrt{3}\,ds=\int_{s=0}^{s=1}\pi(32s^2-24s+6)\cdot 2\sqrt{3}\,ds \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

としなければならない．$2\sqrt{3}$ 倍を忘れてはいけない．今の説明ではいったん t の式で積分を表して, 置換積分で s の式 (*) に達するというやり方だったが, 優秀な人なら t を導入するまでもなくいきなり (*) を書くであろう.

ところで D はどんな形なのだろうか. 断面の円の半径 $\overline{\mathrm{PQ}}$ の増減は根号内を平方完成すれば判る. $0\leqq s\leqq 3/8$ で単調減少, $3/8\leqq s\leqq 1$ で 単調増加である. したがって大体下図のようになる.



三角関数と分数式の積 (慶応大医)

$f(x)=\left(\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x}\right)\sin x$ とすると，$f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x)dx = \boxed{} + C \quad \text{ただし,}C \text{ は積分定数}$$

となる．さらに，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |f(x)|dx = \boxed{}$ となる．

sin の引数は x で置換のしようがない．そうなると部分積分だろうか．$\int x\sin x dx = \int x(-\cos x)'dx$ を部分積分したときを真似て

$$\int \frac{2}{x^3}\cdot \sin x dx = \int \frac{2}{x^3}\cdot(-\cos x)'dx = -\frac{2\cos x}{x^3} - \int \frac{-6}{x^4}\cdot(-\cos x)$$

とやってみるともっともらしいが，しかし，分母が 3 乗から 4 乗になって，余計に難しくなった．**部分積分のわな**にはまっているのである．この場合, 部分積分を使うという方針は正しいが，向きを間違えている．正しい向きで部分積分すれば一般に

$$\frac{\sin x \text{ または} \cos x}{x^{n+1}} \rightsquigarrow \frac{\sin x \text{ または} \cos x}{x^n} \quad (n \geqq 1)$$

のように帰着できる*．すなわち $n \geqq 1$ のとき

$$\int \frac{\sin x}{x^{n+1}}dx = \int \sin x \cdot \left(\frac{-1}{nx^n}\right)'dx = \frac{-\sin x}{nx^n} - \int \cos x \cdot \frac{-1}{nx^n}dx$$
$$\int \frac{\cos x}{x^{n+1}}dx = \int \cos x \cdot \left(\frac{-1}{nx^n}\right)'dx = \frac{-\cos x}{nx^n} - \int (-\sin x) \cdot \frac{-1}{nx^n}dx$$

となる．

さて本問では

$$\int \frac{2\sin x}{x^3}dx = \int \sin x \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)'dx = \frac{-\sin x}{x^2} + \int \frac{\cos x}{x^2}dx$$
$$\int \frac{\cos x}{x^2}dx = \int \cos x \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)'dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}dx$$

*とはいってもn $n=0$ までは下げられず, $n=1$ で止まってしまうのが残念なところである．だから $\int \sin x/x dx$ が求められるわけではない!

を使う．第 2 式を第 1 式に代入すると

$$\int \frac{2\sin x}{x^3}dx = -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}dx$$

右辺の最後の項を左辺に移項すれば

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\sin x dx = -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$\int 2\sin x/x^3 dx$ と $\int \sin x/x dx$ それぞれの不定積分は判らないが，和だけは求められるのである．係数の選び方は微妙で，例えば $\int (1/x^3 + 1/x)\sin x dx$ だと上と同様の計算は出来なくなってしまう．それが本問のずるい，あるいは上手いところである．

最後に定積分を求めよう．$\pi/2 \leqq x \leqq \pi$ で $\sin x \geqq 0$ だから $|f(x)| = f(x)$ であり，$\pi \leqq x \leqq 3\pi/2$ では $\sin x \leqq 0$ だから $|f(x)| = -f(x)$ である．したがって

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |f(x)|dx = \left[-\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[-\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{32}{9\pi^2} + \frac{2}{\pi}$$

三角関数の分数式 (中央大理工)

a, b を正の定数とし，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $f(x) = \dfrac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}$ とおく．
(1) 略
(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を求めたい．補助的に $g(x) = \dfrac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}$ を考え, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$ とおく．このとき, $aI + bJ = \boxed{\ *\ }$, $bI - aJ = \boxed{**}$ である．そこで $aI + bJ = \boxed{\ *\ }$, $bI - aJ = \boxed{**}$ を I, J に関する連立方程式とみなして，I, J を求めると, $I = \dfrac{\boxed{\qquad}}{a^2 + b^2}$, $J = \dfrac{\boxed{\qquad}}{a^2 + b^2}$ となる.

『逆引き微分積分』p.163 (大学入試問題 20) では $a = b = 1$ の場合を扱った. これは他の多くの本に載っている有名問題である．一般の a, b にすると少し難しくなる．後述するように, 解法も (少なくとも『逆引き微分積分』で採用したものとは) 異なる.

$$aI + bJ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos x + b\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．また,

$$bI - aJ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b\cos x - a\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx$$

である．まずは不定積分を求めよう．分数式は分母が簡単になるように変形するという定石に従い, $t = a\cos x + b\sin x$(分母) とおくと $dt = (b\cos x - a\sin x)dx$ となる．これが分子にぴたり合う (そうなるように問題が作られている)．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{b\cos x - a\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx &= \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C \\ &= \log|a\cos x + b\sin x| + C \ (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

となる．ゆえに定積分は

$$bI - aJ = [\log|a\cos x + b\sin x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log b - \log a = \log\frac{b}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

連立方程式を解いて

$$I = \frac{\frac{\pi}{2}a + b\log\frac{b}{a}}{a^2+b^2}, \quad J = \frac{\frac{\pi}{2}b - a\log\frac{b}{a}}{a^2+b^2}$$

ところで『逆引き微分積分』にあるように $a=b$ なら別解がある．$x = \frac{\pi}{2} - t$ という置換によって $\sin x = \cos t, \cos x = \sin t, dx = -dt$ となるから

$$I = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0} \frac{\sin t}{a\sin t + a\cos t}(-dt) = J$$

これは ②の $a=b$ の場合の別証明である．

体積, 逆三角関数の積分 (東大前期理科)

r を正の実数とする．xyz 空間において

$$x^2+y^2 \leqq r^2,\ y^2+z^2 \geqq r^2,\ z^2+x^2 \leqq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ.

逆三角関数については『高校生のための逆引き微分積分』およびこのサポートページにある「逆関数の積分」(gyakukansuu.pdf) を参照せよ．本問は高校の知識だけで解けるように作られているが, この文書では逆三角関数の知識を少し使う．その方が見通しがよいと考えるからである.

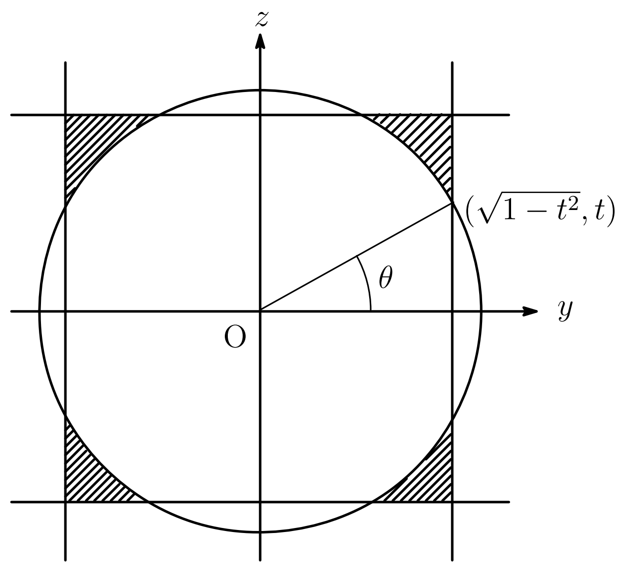
問題の立体を F_r とすると，F_r は F_1 を原点を中心に r 倍に相似拡大したものである．よって F_r の体積を $V(r)$ とすると $V(r)=r^3V(1)$ である．ゆえに $r=1$ の場合が判れば一般の場合も判る．以下 $r=1$ とする.

F_r (と F_1) を定義する連立不等式は第 2 式だけが不等号の向きが違う．したがってこの連立不等式は y と z については対称だが, x と y, x と z については対称でない．つまり x だけが特別である．対称性を壊さないために, F_1 を平面 $\pi_t : x=t$ で切ることにする．π_t は yz 平面と同一視される.

π_t による F_1 の切り口 (を yz 平面の部分集合と見なしたもの) は

$$y^2 \leqq 1-t^2,\ y^2+z^2 \geqq 1,\ z^2 \leqq 1-t^2$$

すなわち，4 点 $(\pm\sqrt{1-t^2}, \pm\sqrt{1-t^2})$ を頂点とする正方形の内部にあり, 原点中心で半径 1 の円の外部にある点たちの集合である.



これが空集合でないための必要十分条件は

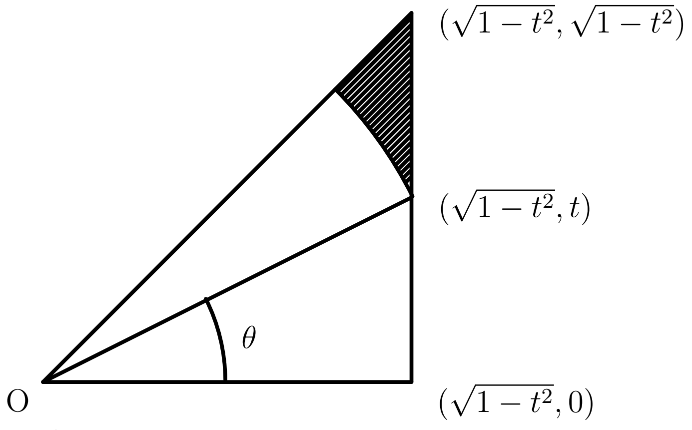
$$1 \leqq \sqrt{2}\sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow |t| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である

F_1 は平面 $x=0$ について対称なので $t \geqq 0$ の部分の体積の 2 倍が V_1 である．そこで $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする (上の図はこの場合).

図のように $\theta = \arcsin t$ とおく (円の半径は 1)．π_t による F_1 の切り口の面積を $S(t)$ とすると

$$\frac{1}{8}S(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{1-t^2}-t)\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-\theta)$$
$$S(t) = 4(1-t^2) - 4t\sqrt{1-t^2} - \pi + 4\arcsin t$$



$V_1 = 2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S(t)dt$ である．積分の各項を別々に求めていこう.

まず $1-t^2 = s$ とおくと $-2tdt = ds$ なので

$$\int -4t\sqrt{1-t^2}dt = \int 2(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\underline{(-2tdt)}$$
$$= \int 2s^{\frac{1}{2}}\underline{ds} = \frac{4}{3}s^{\frac{3}{2}} + C_1 = \frac{4}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} + C_1$$

である．C_1 は積分定数である．また，このサポートページの 「逆関数の積分」(gyakukansuu.pdf) で述べたように (あるいは下の注で述べるように)

$$\int \arcsin t dt = t\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C_2$$

である．C_2 は積分定数である．以上より

$$V_1 = \frac{8(3\sqrt{2}-4)}{3}, \quad V_r = \frac{8(3\sqrt{2}-4)}{3}r^3$$

注 arctan の不定積分は『逆引き微分積分』p.189 (京大入試問題) で求めている．その計算を真似て, arcsin の不定積分を次のように部分積分によって求めることができる．

$$\int \arcsin t dt = \int t' \arcsin t dt = t \arcsin t - \int t(\arcsin t)' dt$$
$$= t \arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = t \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C$$

最後の積分は $1-t^2 = s$ と置換すれば $-2tdt = ds$ から判る．

三角関数を含む積分, 対称性の利用 (名古屋大学前期)

(1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ をみたすとき，$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ.

(1) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx$ とおく．$x=\pi-t$ と置換すると $dx=-dt$ で

$$\begin{aligned}I&=\int_{t=\pi}^{t=0}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(\pi-t)(-dt)=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(\pi-t)dt\\&=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(t)dt=-\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(t)dt=-I\end{aligned}$$

したがって $I=0$.

(2) $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$, $J=\displaystyle\int_0^{\pi}xf(x)dx$ (求めるもの), $K=\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)dx$ とおく.

$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$ より $f(x)$ は $f(\pi-x)=f(x)$ をみたす．よって (1) より $J-\dfrac{\pi}{2}K=0$ で $J=\dfrac{\pi}{2}K$.

そこで K を求めよう．分母を簡単にするという定石に従って $\cos x=u$ とおく．$-\sin xdx=du$ であり,

$$K=\int_{x=0}^{x=\pi}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x-4}\cdot\underline{(-\sin x)dx}=\int_{u=1}^{u=-1}\frac{1-u^2}{u^2-4}\underline{du}=\int_{u=-1}^{u=1}\frac{u^2-1}{u^2-4}du$$

被積分関数を積分しやすい形に変形しよう．$u^2-1=(u^2-4)+3$ を用いて分子の次数を下げてから部分分数分解すると

$$\frac{u^2-1}{u^2-4}=\frac{u^2-4}{u^2-4}+\frac{3}{u^2-4}=1+\frac{3}{(u-2)(u+2)}=1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)$$

ゆえに

$$K=\left[u+\frac{3}{4}\Bigl(\log|u-2|-\log|u+2|\Bigr)\right]_{u=-1}^{u=1}=2-\frac{3}{2}\log 3$$

となって $J=\dfrac{\pi}{2}K=\pi-\dfrac{3\pi}{2}\log 3$.

対数関数の積分 (京都大学後期)

$n < \displaystyle\int_{10}^{100} \log_{10} x \, dx$ を満たす最大の自然数 n を求めよ．ただし，$0.434 < \log_{10} e < 0.435$ (e は自然対数の底) である．

$a > 0, a \fallingdotseq 1$ とする．$\log_a x$ の不定積分はあまり強調されない．底を e に変換すればいいのだから別にどうということはないが，意外に盲点なのかも知れない．

底の変換公式より

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a}, \ \int \log_a x dx = \frac{1}{\log_e a} \int \log_e x dx = \frac{1}{\log_e a}(x \log_e x - x) + C$$

ここで C は積分定数である．これを用いて

$$\begin{aligned}
&\int_{10}^{100} \log_{10} x \, dx = \left[\frac{1}{\log_e 10}(x \log_e x - x) \right]_{10}^{100} \\
&= \frac{1}{\log_e 10}(100 \log_e 100 - 10 \log_e 10 - 90) \\
&= \frac{1}{\log_e 10}(200 \log_e 10 - 10 \log_e 10 - 90) \\
&= 190 - \frac{90}{\log_e 10} = 190 - 90 \log_{10} e
\end{aligned}$$

$0.434 < \log_{10} e < 0.435$ より $39.06 < 90 \log_{10} e < 39.15$ である．したがって $150.85 < 190 - 90 \log_{10} e < 150.94$ となるから $n = 150$.

$1/(1+x^2)^2$ の積分 (徳島大学)

a は実数とし，次の問いに答えよ.
(1) 曲線 $y = ax + \dfrac{1}{1+x^2}$ と x 軸, y 軸および直線 $x = \sqrt{3}$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $f(a)$ を求めよ.
(2) $f(a)$ が最小となる a の値を求めよ.

(1) $f(a) = \pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\left(ax + \frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(a^2x^2 + \frac{2ax}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2}\right)dx$

である．まず $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} a^2x^2dx = \sqrt{3}a^2$ である．

また，第 2 項については, $t = 1 + x^2$(分母) とおくと $dt = 2xdx$ なので

$$\int \frac{2ax}{1+x^2}dx = \int \frac{a}{1+x^2} \cdot \underline{2xdx} = \int \frac{a}{t} \cdot \underline{dt} = a\log t + C = a\log(1+x^2) + C$$

となるから

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2ax}{1+x^2}dx = \Big[a\log(1+x^2)\Big]_0^{\sqrt{3}} = a\log 4 = 2a\log 2$$

次に $1/(1+x^2)$ の積分のときを真似て $x = \tan\theta$ とおくと $dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ であり，また，$1 + x^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ だから

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{x=\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)^2}\underline{dx} &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} (\cos^2\theta)^2 \cdot \underline{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

以上より $f(a) = \pi\left(\sqrt{3}a^2 + 2a\log 2 + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$

(2) $f'(a) = \pi(2\sqrt{3}a + 2\log 2)$ なので $a = -\dfrac{\log 2}{3}$ のとき最小となる.

注 1(超高校級) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$ である.

他方, 部分積分により

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2}dx &= \int x' \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x}{1+x^2} - \int x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx\right)\end{aligned}$$

したがって, 適当に移項して同類項を整理し, 両辺を 2 で割ると

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{x}{1+x^2}\right) + C' \\ &= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C'\end{aligned}$$

注 2(大学 1 年$+\alpha$**)** $a > 0$ のとき $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ である. 両辺を a で微分して

$$\int_0^x \frac{-2a dt}{(a^2+t^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\arctan\frac{x}{a} - \frac{x}{a(a^2+x^2)}$$

$a = 1$ とおけば

$$\int_0^x \frac{-2}{(1+t^2)^2}dt = -\arctan x - \frac{x}{1+x^2}$$

よって

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C$$

『逆引き微分積分』サポートページにある「微分と積分の順序交換」も参照せよ.