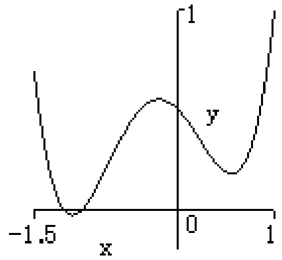
テイラーの定理はじめの一歩

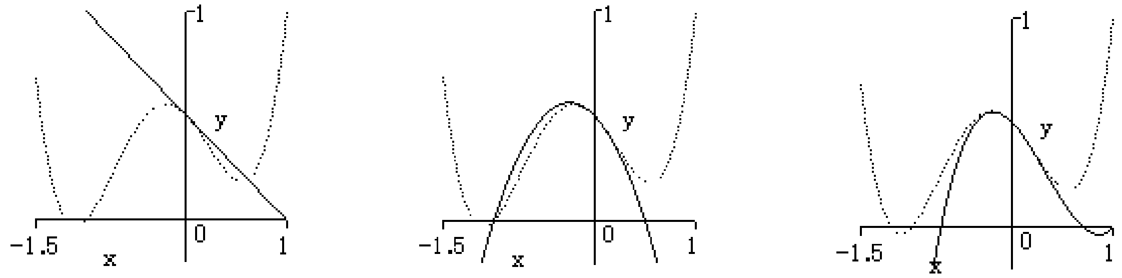
微分積分 I, 関西学院大学数理科学科 2009 年度春学期，担当 示野

関数とは x の値に対して $y=f(x)$ の値がただ 1 つ定まる規則のことだが，微分や積分など公式を使って式の計算をしていると，「値」のことを忘れがちである．ある点の近くでの関数の値の大きさに注目し，グラフや数値の計算を通してテイラーの定理の理解への第一歩となることを目指す．

例 1 $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}-x^2+x^3+x^4$ の $x=0$ の近くでの値を考えよう．



$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる． x の値が 0 に近いと $|x|$ より $|x^2|$ は小さく， $|x^3|$ ， $|x^4|$ は順に更に小さくなる．したがって， $f(x)$ を低い次数で打ち切った多項式の値は， $x=0$ の近くでは $f(x)$ の値に近いはずである．実際，
$p_1(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}$ ， $p_2(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}-x^2$ ， $p_3(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}-x^2+x^3$ のグラフは下図の通りになる（ $y=f(x)$ のグラフは点線で表示）．



一番左の $y=p_1(x)$ は $x=0$ における $y=f(x)$ の接線である． $x=0$ の近くでは， $p_2(x)$ と $p_3(x)$ の違いはグラフからは読み取りにくいが， $p_1(x)$ に比べると $f(x)$ に近づいているのがわかる．たとえば， $x=0.2$ における値を比べてみると，

$$p_1(0.2)=0.4,\ p_2(0.2)=0.36,\ p_3(0.2)=0.368,\ f(0.2)=0.3696$$

のように次数を上げると値が近づいていくのがわかる．

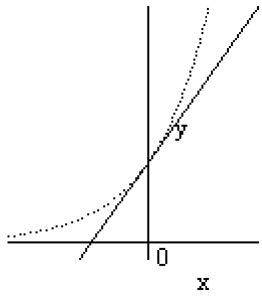
$y=f(x)$ の $x=0$ における接線の方程式は， $y=f(0)+f'(0)x$ だから， $p_1(x)$ の係数，つまり $f(x)$ の定数項 $\dfrac{1}{2}$ と 1 次の係数 $-\dfrac{1}{2}$ は $f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ により与えられていることがわかる．2 次以上の項の係数も微分と関係がある．

一般の 4 次式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ で考えよう．これに $x=0$ を代入すると， $f(0)=a_0$ がわかり， $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3$ に $x=0$ を代入すると $f'(0)=a_1$ がわかる．さらに微分して $x=0$ を代入することを続けていこう． $f(x)$ を n 回微分したものを $f^{(n)}(x)$ と表す． $f''(x)=2a_2+6a_3x+12a_4x^2$ に $x=0$ を代入すると $f''(0)=2a_2$ ，2 次の係数は $a_2=\dfrac{f''(0)}{2}$ で与えられる． $f^{(3)}(x)=6a_3+24a_4x$ に $x=0$ を代入すると $f^{(3)}(0)=6a_3$ ，3 次の係数は $a_3=\dfrac{f^{(3)}(0)}{6}$ で与えられる． $f^{(4)}(x)=24a_4$ だから，4 次の係数は $a_4=\dfrac{f^{(4)}(0)}{24}$ で与えられる．こうして，4 次多項式 $f(x)$ は

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4$$

のように係数を微分を用いて表すことができることがわかった．

例 2 多項式でない関数の例として指数関数 $f(x)=e^x$ をとりあげよう．



$f'(x)=e^x$ だから $x=0$ における $y=e^x$ の接線の方程式は，
$y=p_1(x)$，$p_1(x)=f(0)+f'(0)x=1+x$ で与えられる． $y=e^x$ と
$y=p_1(x)$ のグラフは右図のようになる． $x=0$ の近くで e^x と $p_1(x)$
の値が近いことがグラフからわかる．

例 1 にならって， $f(x)$ から n 次多項式

$$p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

を作ろう． $f^{(n)}(x)=e^x$ より，

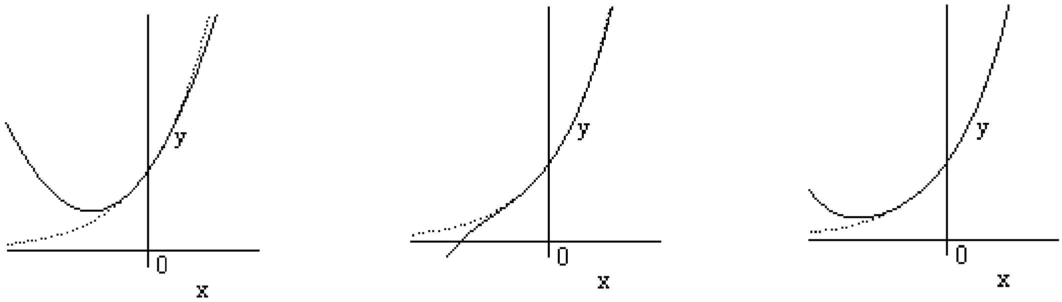
$$p_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

となる．作り方から，

$$f^{(k)}(0)=p_n^{(k)}(0)\ \ (0\leqq k\leqq n)$$

が成り立つ．

$p_2(x)=\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2}$， $p_3(x)=\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$， $p_4(x)=\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$ のグラフは下図のようになる（ $y=f(x)$ のグラフは点線で表示）．



n を大きくしていくと $p_n(x)$ が e^x に近づいていくのがわかる．たとえば， $x=0.2$ における値を比べてみると，

$$p_1(0.2)=1.2,\ p_2(0.2)=1.22,\ p_3(0.2)=1.2213,\ p_4(0.2)=1.2214,\ f(0.2)=1.2214$$

のように次数を上げると値が近づいていくのがわかる（小数点以下 4 桁の近似値）．

$x=0$ の近くで， $p_n(x)$ と e^x が「近い」ということを別の形で見てみよう． $n=1$ のとき，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_1(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)=0$$

となる．最後の等号は $x=0$ における e^x の微分係数が 1 であることを表している． $n=0$ のとき，
$p_0(x)=1$ であり， $\lim_{x\to 0}(f(x)-p_0(x))=\lim_{x\to 0}(e^x-1)=0$ となる．これは $x=0$ において e^x が連続であることを表している． $n=2$ のとき，ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_2(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{2x}=0$$

がわかる．一般の n の場合もロピタルの定理を繰り返し使うと，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_n(x)}{x^n}=0$$

であることがわかる． x の値がゼロに近いとき $|x^n|$ は n が大きいほど小さいから，上の式は x がゼロに近づくとき $f(x)-p_n(x)$ は x^n よりもずっと速くゼロに近づくことを意味している．

指数関数を例に説明したが，一般の $f(x)$ の場合， $x=0$ の近くに限らず一般に $x=a$ の近くの場合（テイラーの定理）， $f(x)-p_n(x)$ （剰余項）の表示式（ラグランジュの剰余項）とその大きさの評価，などメインの話は教科書（松木敏彦『理工系 微分積分』学術図書出版）に沿って授業で説明する．