球面の幾何と世界地図1

関西学院大学理工学部数理科学科 示野 信一2

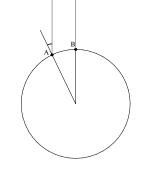
数理科学 数学を中心にその応用分野(自然科学、コンピュータ、金融工学など)との関連を意識した広がりをもつ学問

問1(エラトステネスの地球の周長の計算)

A:アレクサンドリア, B:シエネ

- AはBの真北にある
- AとBの距離は925km
- 夏至の日の太陽の南中高度の差は7.2度

地球の全周は何キロメートルか?



経度と緯度(球面座標)

N: 北極

〇:地球の中心

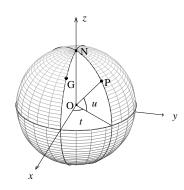
G: グリニッジ天文台

P: 地球上の点

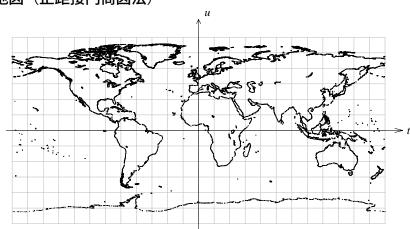
t: 経度 $(-\pi \le t \le \pi, +$ は東経, - は西経)

u: 緯度 $\left(-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, +$ は北緯, - は南緯 $\right)$

問2x, y, z をt, u で表せ.



球面座標による地図(正距接円筒図法)



球面から北極と南極を除いた部分 $\leftrightarrow -\pi \leq t < \pi, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \ (1 対 1)$

地図 (map) とは、球面(地表)の一部分から平面の一部分の上への 1 対 1 の **写像** (map、対応のこと) である。地図には歪みがある。長さ、面積、角度をすべて保った地図は描けない(\leftarrow 球面は曲がっている)。

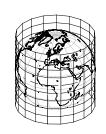
ホームページ http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~shimeno/

メールアドレス shimeno@kwansei.ac.jp

¹²⁰⁰⁹年11月27日金光高等学校での出前授業

²授業に関する質問や問題の解答,講義資料などのアドレス

問3 球の中心に置いた点光源から赤道で球面に接する円筒形のスクリーンに投影し、経度ゼロの経線で切り開いて地図を作る(心射円筒図法). このとき、球面上の点と地図上の点の対応は、球面座標 (t,u)(経度と緯度)を用いてどのように表わされるか?



メルカトル図法
$$x = Rt$$
, $y = R\log_e\left(\tan u + \frac{1}{\cos u}\right)$ (R は地球の半径)

$$e=1+1+rac{1}{2}+rac{1}{3\cdot 2}+rac{1}{4\cdot 3\cdot 2}+\cdots=2.718\cdots$$
 (自然対数の底)
$$(-rac{2\pi}{5}\leq u\leq rac{2\pi}{5}$$
 の範囲)

- 方位磁石を用いて進行方向と経線のなす角を一定に保って航海することは容易(等角航路).
- メルカトル図法では等角航路は直線で表わされる.
- メルカトル図法の式 $\log_e(\tan u + 1/\cos u)$ はメルカトルの地図 (1569) よりも後の 1668 年にグレゴリーによって導かれた。 1614年にネイピアが対数を発明するまでは, \log も e も無かった。

大圏航路 (大円)

球を球の中心を通る平面で切った切り口にできる円を**大円**という. 球面上の2点を通る大円の短い方の弧が最短経路を与える(**大圏航路**).

メルカトル図法の地図における,関西空港-パリシャルルドゴール空港間の等角航路(点線の直線)と大圏航路(実線の弧),地図上の見かけに反して,大圏航路の方が距離が短い.



2008年京都大学前期入試 数学(理系乙)問題6で,等角航路より大圏航路が短いことを題材にした問題が出題された.

問4(心射方位図法)球の中心に光源を置き、球面に接する平面に投影する.北極に接する平面に投影するとき、球面と地図の対応を表わす経度 t と緯度 u の数式を求めよ.この地図では、大圏航路はどのように表されるか.球面のどのような範囲を描くことができるか?