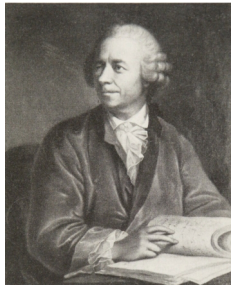


$$e^{\pi i} + 1 = 0$$



オイラー (1707–1783)

オイラーを読め，オイラーを読め，
オイラーは我々すべての師である
ラプラス

1 オイラーの公式

1.1 オイラー

レオンハルト・オイラー (1707–1783) はスイスの数学者。ヨハン・ベルヌーイに師事して数学を学んだ。人並み外れた記憶力と計算力を持っていたオイラーは、「人が呼吸するように、鷲が空を舞うように計算した」と評された。1735年に右目 1766年に左目の視力を失ったが、研究を続け、生涯で800篇におよぶ論文を発表した。オイラーの研究は、解析学、数論、代数学、幾何学などの数学分野にとどまらず、物理学などの分野にも重要な業績を残した。

オイラーは13人の子どもをもうけた。計算をし、家族と食事をし、孫と遊んで過ごすある日の午後、自宅で息を引きとった。

現代においてもオイラーを高く評価する数学者は多い。2007年に生誕300年を迎えることもあり、オイラー関連書籍もいくつか出版されている。

1.2 オイラーの公式

実数 θ に対して、

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が成り立つ。これをオイラーの公式またはオイラーの恒等式と呼ぶ。

20世紀に朝永振一郎とともにノーベル賞を受賞したファインマンはオイラーの公式を「宝石」、「もっとも注目すべき数学公式」と賞した。また小説『博士の愛した数式』に登場する。

オイラーの公式において $\theta = \pi$ とすると $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$ より, $e^{\pi i} = -1$, したがって

オイラーの等式

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

が導かれる。

オイラーの公式で $\theta = \pi/2$ とすると,

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = i$$

が得られる。

$$i^i = (e^{\frac{\pi i}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

より i の i 乗が e^{π} の平方根の逆数に等しいという式

$$i^i = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$$

が導かれる。

以下では, オイラーの等式に現われる数 e , π , i について説明する。

1.3 π

円とは、中心からの距離が一定値（半径）に等しいような平面上の点を結んでできる曲線である。円の周の長さ（半径の2倍）の比を円周率と呼び、 π で表す。 π というギリシャ文字による円周率の表記はオイラーが用いることで広まった。 π は数学においてもっとも重要な定数といってよいだろう。

小数点以下 35 桁までの π の値は

$$3.14159265358979323846264338327950288$$

である。円周率が約 3.1 であることは紀元前 2000 年頃には知られており、その後様々な方法によって円周率の値が計算されてきた。2002 年に東京大学の金田康正氏が日立のスーパーコンピュータを用いて、円周率を約 1 兆 2,400 億桁計算したのが世界記録である。

17 世紀に得られた π を含む等式を 2 つ挙げておこう。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \quad (\text{ライプニッツの公式})$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \dots \quad (\text{ウォリスの公式})$$

上の式で \dots は無限に足し合わせて（ウォリスの公式では無限に掛け合わせて）いくことを意味する。ライプニッツの公式の右辺のような無限の和を無限級数という。

整数 p, q ($q \neq 0$) に対して p/q の形で表される数を有理数と呼ぶ。有理数は

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{1}{40} = 0.025$$

のような有限桁で終わる小数が，

$$\frac{1}{3} = 0.333\dots,$$
$$\frac{1}{13} = 0.076923076923\dots$$

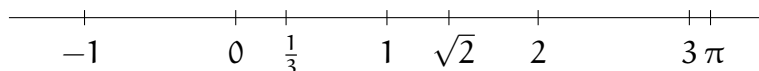
のようにあるところから先同じパターンが繰り返し現われる小数（循環小数）のいずれかで表される。

数を大きさの順に一直線上に並べるとき，有理数の隙間に有理数でない数が無数に存在する。これらの数を無理数と呼ぶ。たとえば，2乗すると2になる正の数 $\sqrt{2}$ （ルート2）は無理数である。

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097\dots$$

π は無理数であり，しかも π は，整数を係数とする2次方程式 $x^2 = 2$ の解である $\sqrt{2}$ とは違い，どのような自然数 n に対しても整数を係数とする n 次方程式の解にはならない。このような無理数を超越数と呼ぶ。

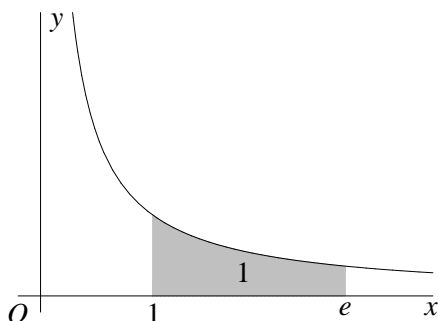
有理数と無理数を合わせたものを実数といい，直線上に目盛りをつけて実数と対応させたものを数直線という。



1.4 e

平面の上で原点で垂直に交わる2つの数直線 x 軸と y 軸をとり、実数の組 (a, b) と $x = a, y = b$ であるような平面上の点を対応させて考える。このように座標をとった平面を座標平面または発明者の名をとってデカルト平面という。

反比例の関係を表す $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のグラフを考える。これは正の数 x に対して座標平面上の点 $(x, 1/x)$ を結んでできる曲線である。



$y = 1/x$ のグラフの下にあり $x = 1$ とある数 $e (> 1)$ との間にある部分 (図の灰色の部分) の面積が 1 になるような定数 e をネイピアの数という。

e は微分積分学において非常に重要な役割を果たす。 e という記号はオイラーによるものだが、17世紀始めに対数を発明したネイピアの名前をとってネイピアの数と呼ばれる。

オイラーは e が無限級数

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

で表されることを示した。最初の 10 項の和を取ると e の近似値

2.71828 が得られる。

e は無理数であり、さらに超越数であることが証明されている。 e の小数点以下 50 桁までの近似値は

2.71828182845904523536028747135266249775724709369996

である。

1.5 $i^2 = -1$

ゼロでない実数の 2 乗は $2^2 = 4$, $(-1)^2 = 1$ のように正の数になる。したがって 2 乗すると -1 になる実数は存在しない。2 次方程式 $x^2 = -1$ を「解なし」で済ませず、ないものは作って数を広げていく方向に歴史は進んだ。 $i^2 = -1$ を満たす「数」 $i = \sqrt{-1}$ を新たに導入し、 $a + bi$ (a, b は実数) の形の数を考え、それらを複素数と呼ぶ。

複素数の和，差，積，商は，

$$1 + i + 3 - 2i = 4 - i$$

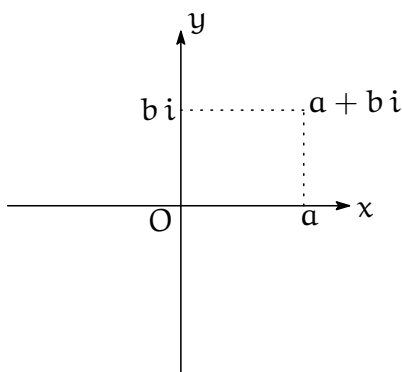
$$(4 + i)(2 + 3i) = 8 + (2 + 12)i + 3i^2 = 8 + 14i - 3 = 5 + 14i$$

$$\frac{1}{2 + i} = \frac{2 - i}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i}{4 - i^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

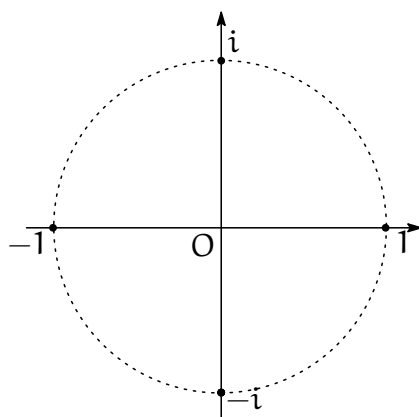
のようにふたたび複素数になる。

複素数 $a + bi$ と座標平面上の点 (a, b) を対応させるとき，平面を複素平面（または複素数平面）と呼ぶ。複素平面は 19 世紀初頭に

アルガン，ヴェッセル，ガウスによって考えられた。(オイラーはこのように考えていなかった。)



i は $(0, 1)$ の位置にあるが， $i^2 = -1$ ， $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ， $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ のように， 1 に i をかける毎に反時計回りに 90° ずつ回転していくことがわかる。



角度を測るのに度 ($^\circ$) ではなく，半径 1 の扇型の円弧の長さをとることにする。このような角度の測り方を弧度という。半径 1 の円の

周の長さは 2π だから, $360^\circ \leftrightarrow 2\pi$, したがって, $90^\circ \leftrightarrow \pi/2$ となる。

実数 θ に対して 1 を角 θ だけ回転した複素平面上の点 (に対応する複素数) を $e^{i\theta}$ と書く。特に, $\theta = \pi/2, \pi, 2\pi$ とすると,

$$e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1$$

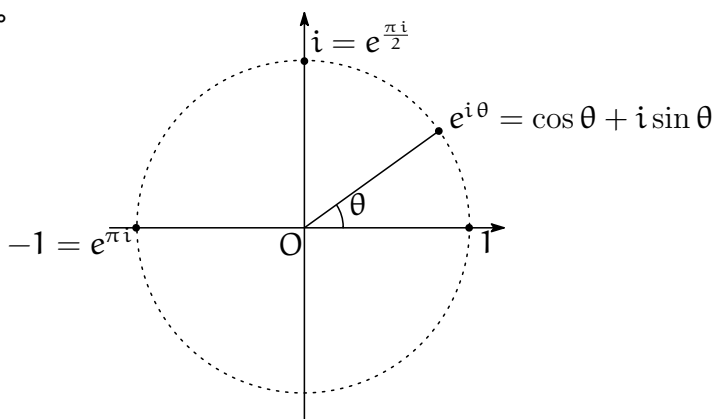
となる。 $e^{\pi i} = -1$ を書き直すと, オイラーの等式

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

が得られる。また任意の弧度 θ を考えると, オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が得られる。



次の節では e の複素数乗の意味を明らかにし, オイラーの公式を証明する。

2 オイラーの公式の証明

2.1 微分を用いたオイラーの公式の証明

高等学校の数学 III または大学 1 年の微分を学んだ人対象 (たとえば [10], [8] を参照)。

指数関数の性質

e を底とする指数関数 e^x は、微分しても変わらない $(e^x)' = e^x$ という重要な性質を持っている。またゼロでない実数 k に対して

$$(e^{kx})' = k e^x$$

となる。これは指数関数を特徴づける重要な性質である。実際、微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f'(x) = k f(x)$$

を満たしているとする、 $f(x) = C e^{kx}$ (C は定数) の形をしていることがわかる¹。 $x = 0$ で値が 1 になるという条件 $f(0) = 1$ をつけると、 $f(0) = C e^0 = C = 1$ より $f(x) = e^{kx}$ となる。つまり e^{kx} は、

$$f'(x) = k f(x), \quad f(0) = 1$$

を満たす関数として特徴付けられる。

¹ $f(x) = e^{kx} g(x)$ とおくと、積の微分の公式により $g'(x) = 0$ となることから、したがって $g(x) = C$ 、 $f(x) = C e^{kx}$ となる。

e^{ix}

x を任意の実数とする。オイラーの公式の左辺 e^{ix} の指数 ix は虚数である。 e の虚数乗とは一体何だろうか。ここでは、指数が実数の場合と同様に、

$$f'(x) = if(x), \quad f(0) = 1$$

により特徴付けられる関数を e^{ix} と定めることにする。ただしこの関係式の形からもわかるように、 $f(x)$ は複素数に値をとるとする。 $f(x) = p(x) + iq(x)$ ($p(x), q(x)$ は実数値) と実部と虚部に分けることができるが、このとき $f(x)$ の微分は $f'(x) = p'(x) + iq'(x)$ により定める。

$f(x) = \cos x + i \sin x$. とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x)' + i(\sin x)' \\ &= -\sin x + i \cos x \\ &= i(\cos x + i \sin x) = if(x), \end{aligned}$$

また

$$f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$$

したがって、オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が証明された。

2.2 ベキ級数を用いたオイラーの公式の証明

マクローリン展開を学んだ人対象 (たとえば [10], [8], [3, 54 節] を参照)。

すべての実数 x に対して, e^x , $\cos x$, $\sin x$ は次のベキ級数に展開される。

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.\end{aligned}$$

e^x の x を ix に置き換えると, $i^2 = -1$ より,

$$\begin{aligned}e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x\end{aligned}$$

となる。したがって, オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が証明された。

注釈

上の証明は明快なものだが, よくわからないと評判が悪いようだ。

冒頭の e^x , $\cos x$, $\sin x$ のべき級数展開は、微分積分学の講義の中でマクローリン展開の例として教えられている。これは高等学校の数学 III にはなく、理工系大学の微分積分学で新たに学ぶ重要な話題だが、学生諸君は馴染みのない複雑な式を理解しかねるようだ。

e^x (x は実数) の展開式から e^{ix} の展開式への移行は大胆だが、 e の虚数乗とは何かそもそも定義していなかったのだから、べき級数

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

により e^{ix} を定義したと捉えるべきである。これを各項ごとに微分すると、

$$(e^{ix})' = 0 + i - x - \frac{ix^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots = ie^{ix},$$

また

$$e^{i0} = 1 + 0 + \dots = 1$$

となる。これは上のべき級数が e^{ix} の定義としてふさわしいことを示している。

上でみた無限級数の項の順序の入れ替えや項別微分は、有界閉区間でべき級数が絶対一様収束することから正当化される。

この節に関連して朝永振一郎の随筆「数学がわかるというのはどういうことであるか」を読むことを勧める ([5])。

2.3 微分方程式を用いたオイラーの公式の証明

2階線形微分方程式を学んだ人対象（たとえば [7], [9] を参照）。

実数 x を変数とする関数 $y = e^{ix}$, $\cos x$, $\sin x$ はいずれも微分方程式

$$y'' + y = 0$$

の解である。2階線形微分方程式の独立解は2つしかないから、これらの解の間に1次関係

$$e^{ix} = a \cos x + b \sin x$$

がある。この式を微分すると

$$i e^{ix} = -a \sin x + b \cos x.$$

上の2つの式に $x = 0$ を代入すると、

$$1 = a, \quad i = b,$$

したがって、オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が証明された。

注釈

上の議論を厳密に正当化するためには，実変数，複素数値関数に対して微分方程式論を展開しておかなければならない。これは実変数，実数値の場合がきちんとできていれば，大きな困難はない。

ここでも e^{ix} が何者であるかが問題になるが，微分方程式の初期値問題

$$y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = i$$

の解として定義する，あるいはべき級数

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

で与える方法がある。

e^{ix} , $\cos x$, $\sin x$ はいずれも $y'' + y = 0$ の解でそれぞれ初期条件

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = i,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

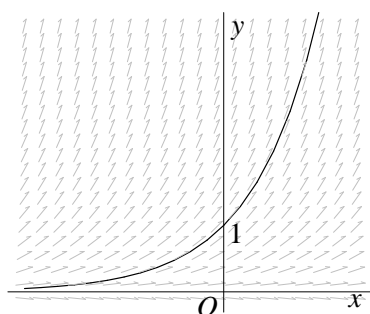
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

により決まるものである。関数の間の一次関係はこれらの初期条件から決まる。また微分方程式の級数解をこれらの初期条件で解くことにより，それぞれの関数のべき級数展開が得られる。ダランベールの判定法により収束半径は無限大であることがわかる。

2.4 微分方程式から見た指数関数

微分方程式の流れの場合，相平面を学んだ人対象（たとえば [7], [9] を参照）。

x を実変数 $y = y(x)$ を未知関数とする微分方程式 $y' = y$ は，各点 (x, y) を通る解曲線の微分すなわち接線の傾き（左辺）が y の値（右辺）に等しいということを表している。 xy 平面上の点を始点とし x 成分が正で傾きが y に等しい矢印を描くと下の図のようになる。併せて， $y(0) = 1$ となる解 $y(x) = e^x$ も描いた。



曲線 $y = e^x$ は矢印の流れに沿って進む。つまり，曲線上の各点を始点とする矢印は曲線の接線の方向ベクトル（接ベクトル）である。

次に t を実変数として， $z = z(t)$ を複素数値の未知関数とする，微分方程式

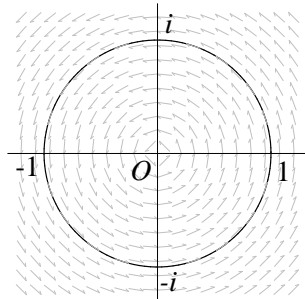
$$z'(t) = iz(t)$$

を考え，初期条件 $z(0) = 1$ を満たす解を $z(t) = e^{it}$ と定義する。右辺の $iz(t)$ は複素平面上で $z(t)$ を $\pi/2$ 回転したものである。

$z(t) = x(t) + iy(t)$ とおくと，この微分方程式は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

と表すこともできる。右辺のベクトル $(-y, x)$ はベクトル (x, y) を原点中心反時計回りに $\pi/2$ 回転したものである。座標平面上の各点 (x, y) を始点とするベクトル $(-y, x)$ を図示する（見やすくするためベクトルは縮めて描いている）。



原点を始点とする各点の位置ベクトルと接ベクトルが接するような曲線は原点中心の円である。また (x, y) が原点中心半径1の円周（単位円周）上にあるとき，接ベクトル $(-y, x)$ の長さは $\sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ であるから，初期条件 $x(0) = 1, y(0) = 0$ を満たす解は，座標平面上で $(1, 0)$ をスタートして一定の速さ1で単位円周上を移動し， $t = 2\pi$ でもとの位置 $(1, 0)$ に戻る。したがって $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$ であり，オイラーの公式

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

が証明された。

あとがき

オイラーの公式について 2001 年ごろウェブページで書きかけて中断したままになっているが，オイラー生誕 300 年にあたり改めて書いてみた。

2007 年 8 月 4 日

示野信一

岡山理科大学理学部応用数学科

参考文献

- [1] L. オイラー 『オイラーの無限解析』海鳴社，2001（原著 1748）.
- [2] 小川洋子 『博士の愛した数式』新潮社，2005.
- [3] 高木貞治 『解析概論』（53 節）岩波書店，1938.
- [4] W. ダンハム 『オイラー入門』（第 5 章）シュプリンガーフェアラーク東京，2004.
- [5] 朝永振一郎 『科学者の自由な楽園』岩波文庫，2000.
- [6] T. ニーダム 『ヴィジュアル複素解析』培風館，2001.
- [7] 俣野博 『常微分方程式入門』岩波書店，2003.
- [8] 村上悟/示野信一 『大学 1 年生の微分積分学』岡山理科大学.
- [9] 村上悟/示野信一 『現象の数理』岡山理科大学.
- [10] S. ラング 『解析入門』岩波書店，1978.