特　殊　相　対　論

第 1 回レポート問題 (19/11/29 出題, 19/12/13 提出)　　　担当　岡村 隆

Q.1 — Q.3 のすべてに答えよ.

番外編 はレポート問題でなく，興味のある人用.

Q.1　観測者 O の静止 (慣性) 系を S, その慣性座標系を (t,x,y,z) とする．そして, 慣性系 S の x 軸方向に速度 V で等速直線運動する慣性系を S′, その慣性座標系を (t',x',y',z') とすると, 2 つの慣性座標系は, 次の Lorentz 変換で関係付けられる：

$$C\,t' = \gamma\,(C\,t - \beta\,x)\ , \qquad x' = \gamma\,(x - \beta\,C\,t)\ , \qquad y' = y\ , \qquad z' = z\ , \tag{1a}$$

または

$$C\,t = \gamma\,(C\,t' + \beta\,x')\ , \qquad x = \gamma\,(x' + \beta\,C\,t')\ , \qquad y = y'\ , \qquad z = z'\ . \tag{1b}$$

ここで, β, γ は次式で定義される：

$$\beta := V/C\ , \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/C^2}}\ .$$

(S′ 系に対して静止した) 棒を x' 軸と平行に置き, その右端の x' 座標値を X'_R, 左端を X'_L とすると, 棒の静止系 S′ におけるその長さ (固有長) L_0 は, 明らかに $L_0 = X'_R - X'_L$ である.

(1) 変換 (1a) を用いて, 観測者 O による棒の長さの測定値 ℓ を求め,
「運動する棒の長さは, その運動方向に縮んだように測定される」ことを示せ.

(2) 以下の A 氏の議論の間違いを, A 氏が用いた変換 (1b) のもとで正せ.

A 氏の主張　変換 (1b) を用いる．観測者静止系 S における棒の両端の x 座標値は, S′ 系のものと

$$X_R = \gamma\,(X'_R + \beta\,C\,t')\ , \qquad X_L = \gamma\,(X'_L + \beta\,C\,t')\ ,$$

の関係にある．よって, 観測者 O による棒の長さの測定値 ℓ は,

$$\ell := X_R - X_L = \gamma\,(X'_R - X'_L) = \frac{L_0}{\sqrt{1-\beta^2}} > L_0\ ,$$

となる．つまり,「運動する棒の長さは, その運動方向に伸びたように測定される」.

次に, S′ 系における空間座標値が (a',b',c') の場所に, 理想的時計を固定した.(つまり, その時計は S′ 系とともに動く)

(3) 「運動する時計の針はゆっくり進む」ことを, 変換 (1b) を用いて (標準的な計算法で) 示せ.

(4) 変換 (1a) を用いても, 前小問と同じ結果が得られることを示せ[*1].

(5) 「運動する時計の針はゆっくり進む」ことは実験的に確認されており, 定量的にも, 特殊相対論が予言する値と一致している．実験例を調べていくつか列挙し, その一つについて説明せよ.

[*1] まわりくどい方法だが, 物理的結論は導出法によらず一致するはずなので, そのチェック．正しく扱わないと, 小問 (2) の A 氏と似たような間違いをする.

Q.2 Lorentz 変換は時間と空間座標が入り混じった変換なので, 慣性系によって「何が時間で何が空間か？」が異なる. よって, 時間・空間は慣性系ごとに (観測者ごとに) 定まる相対的な概念となる一方,「いつ, どこで」の組で表される事象 (〜事件) はすべての慣性系で同一で[*2], 絶対的な意味をもつ[*3].

Lorentz 変換の世界は図的に理解できる. そのために, ある慣性系 S 系の慣性座標を (Ct, x, y, z) として, $C\,t$ を縦軸, x, y, z を 3 つの "横軸" とする 4 次元**時空図**を用意する. 慣性系 S における事象 P の慣性座標の値を (Ct_P, x_P, y_P, z_P) とすると, 事象 P は時空図上の「点」として表される.

4 次元の図を描くのは無理なので, 以下では y, z 座標を無視した 2 次元時空図 (Ct, x) を考えよう.

(1) S 系の x 軸の正の向きに速さ v で等速直線運動する粒子 A の軌跡を時空図上に図示せよ. ただし, $t=0$ で, $x=a$ を通過するものとする.

(2) S 系の同時刻面 (線) $t=$ 一定 を図示せよ.

慣性系 S の x 軸方向に, 速度 $V\ \ (\beta := V/C)$ で等速直線運動する慣性系を S$'$ とする. $t=t'=0$ で 2 つの慣性系の空間座標原点が一致するとすると, 2 つの慣性座標は次の Lorentz 変換で結び付けられる：

$$\begin{cases} C\,t' = \gamma\,(C\,t - \beta\,x) \\ x' = \gamma\bigl\{x - \beta\,(C\,t)\bigr\} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} C\,t = \gamma\,(C\,t' + \beta\,x') \\ x = \gamma\bigl\{x' + \beta\,(C\,t')\bigr\} \end{cases} \qquad \left(\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

(3) 慣性系 S$'$ の空間座標の原点 O$'$ の軌跡と同時刻面 (線) $t'=$ 一定 とを, 時空図上に図示せよ. ただし, $V>0$ と $V<0$ のそれぞれについて描くこと.

(4) 時空図を用いて「同時刻の相対性」(同時刻は観測者に応じて変化する相対的な概念であること) を説明せよ.

(5) 時空図を用いて「Lorentz 収縮」を説明せよ.

(6) 時空図を用いて「時間の遅れ」を説明せよ.

(7) 2 つの事象 P, Q の時間的順序がすべての慣性系で一致する (e.g. すべての慣性系で, 事象 P は Q の前に起こったなど) ための必要十分条件を求めよ.

[*2] 事象の具体的な慣性座標の値は, 慣性系ごとに異なるが, その指し示すものは同一である.

[*3] Galilei 変換の世界でも, 事件 (事象) を指し示すには「いつ, どこで」が必須であり, すべての慣性系で同一である. ただ, Galilei 変換の世界では, すべての観測者にとって共通の絶対時間が存在するので, 「いつ」は単独でも意味がある.

Q.3 音源が発する音を観測者 O$'$ が観測する．観測者 O$'$ が観測する音の角振動数と波数を, それぞれ ω', k' とし, 音源とともに動く観測者 O が観測するそれらを ω, k とする．媒質に対する音波の伝播速度を c_s とすると, (ω', k') と (ω, k) は次の関係にある (ドップラー効果).

(甲) 媒質に対し音源は静止しており, 観測者 O$'$ が速度 V で波源から遠ざかる場合

$$\omega' = (1 - V/c_s)\,\omega\ , \qquad\qquad k' = k\ . \tag{2}$$

(乙) 媒質に対し観測者 O$'$ は静止しており, 音源が速度 V で O$'$ から遠ざかる場合

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + V/c_s}\ , \qquad\qquad k' = k. \tag{3}$$

これら音のドップラー効果 (2), (3) はいくつかの方法で求められるが, Galilei 変換と音波の分散関係から容易に求めることができる．以下, 音源と観測者 O$'$ を結ぶ直線方向を x 軸とし, 音源と観測者は x 軸上を運動するものとして考察せよ.

(1) 波の位相は観測者によらず不変である．これより, Galilei 変換の下で (ω, k) と (ω', k') との間の変換則を求めよ.

(2) 媒質静止系で (媒質に対し静止した観測者に対して), 音波は分散関係 $c_s =$ (波長) $\times$ (振動数) が成り立つ．これより, 音のドップラー効果 (2), (3) を導け.

光のドップラー効果も同様な考察から導ける．ただし, 光 (電磁波) は Maxwell 方程式に従うので, 特殊相対論で議論する必要がある．つまり, Galilei 変換でなく Lorentz 変換を用いて議論する．以下, 光速度 c は「普遍的な (“万人” に共通の) 伝達速度 C」に等しいとする.

(3) Lorentz 変換を用いて, 光源とともに運動する観測者 O が観測する光の (ω, k) と, 観測者 O$'$ の観測する (ω', k') との間の変換則を求めよ.

(4) 光の場合, 光源もしくは観測者 O$'$ のいずれが動いているかにかかわらず, それらが相対的に速度 V で遠ざかっているとき, 次式が成立することを示せ：

$$\omega' = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}}\ \omega\ , \qquad\qquad k' = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}}\ k\ .$$

(5) ここまで, 光源や観測者 O$'$ が, それらを結ぶ直線上を運動する場合を考察した．それらを結ぶ直線上を運動しない場合, 例えば, 光源が観測者 O$'$ を通らない直線上を運動する場合などでは, Galilei 変換の世界には無い, Lorentz 変換の世界で特有の効果 (横ドップラー効果) が存在する．横ドップラー効果を数式を用いて説明せよ.

番外編　特殊相対性理論は, 次の 3 つの原理より導かれる：

0. すべての慣性系において, 時間は一様であり, 空間は一様・等方である
1. すべての慣性系において, あらゆる物理法則は同じ形をとる (すべての慣性系は対等である)
2. すべての慣性系において共通の有限速度 C が存在する

簡単のため, 空間は 1 次元とし, 慣性系 S′ が, 慣性系 S に対し x 軸方向に速度 V で等速直線運動しているとする．また, 時刻 $t = t' = 0$ で, S, S′ の空間座標の原点 O, O′ は一致しているとする．

原理 0．より, S, S′ それぞれの慣性座標 (t, x), (t', x') は, 高々線形変換で結び付くことが分かるが, 上記設定の下では次式のように表せる：

$$t' = f_0(V)\, t + f_1(V)\, x \;, \qquad\qquad x' = g_0(V)\, t + g_1(V)\, x \;. \tag{4}$$

以下では, 任意の V に対し, $f_0(V) \neq 0$, $g_1(V) \neq 0$ とする．

(1) 次式を示せ： $g_0(V) = -V\, g_1(V)$．つまり，$x' = g_1(V)\,(x - V\, t)$.

次に, 慣性系 S, S′ の運動状態をそのままにして, それぞれの空間座標軸 (x, x' 軸) の向きを一斉に反転させることを考える．反転させた空間座標を “ ¯ ” 付きで表すと, $\bar{x} = -x$, $\bar{x}' = -x'$ である．このとき, Eq.(4) を “ ¯ ” 付き座標で表すと, 次式となる：

$$t' = f_0(V)\, t - f_1(V)\, \bar{x} \;, \qquad\qquad \bar{x}' = g_1(V)(\bar{x} + V\, t) \;. \tag{5}$$

(2) S, S′ 系それぞれの慣性系座標を, はじめから “ ¯ ” 付き座標 $(t, \bar{x})$, $(t', \bar{x}')$ に選んだとする．空間は等方なので, Eq.(4) が成立するなら, “ ¯ ” 付き座標でも “同じ” 変換が成立しなければならない[*4]．このことより, f_0, g_1 は偶関数, f_1 は奇関数であること, つまり以下を示せ：

$$f_0(-V) = f_0(V) \;, \qquad g_1(-V) = g_1(V) \;, \qquad f_1(-V) = -f_1(V) \;.$$

前小問の結果より, 未知の偶関数 $h(V)$ を用いて, $f_1(V) = -V\, h(V)$ と表せる．また, 添字が面倒なので, f_0 と g_1 をそれぞれ f, g と略記する．このとき, Eq.(4) は次のように少し簡単になる：

$$t' = f(V)\, t - V\, h(V)\, x \;, \qquad\qquad x' = g(V)\,(x - V\, t) \;. \tag{6}$$

(3) S 系は, S′ 系に対して x' 軸方向に速度 $-V$ で等速直線運動していることに注意すると, Eq.(6) の逆変換が直ちに得られる．それが次式であることを示せ：

$$t = f(V)\, t' + V\, h(V)\, x' \;, \qquad\qquad x = g(V)\,(x' + V\, t') \;. \tag{7}$$

(4) 変換 (6) の逆変換は素直に Eq.(6) を t, x について逆解きしても得られる．当然その結果は Eq.(7) と同値でなければならない．このことより, 次式が成立することを示せ：

$$f(V) = g(V) \;, \qquad\qquad f(V) - V^2\, h(V) = 1/f(V) \;.$$

[*4] ただし, S, S′ の運動状態はそのままなので, “ ¯ ” 付き座標では, 慣性系 S′ は, S 系に対して $\bar{x}$ 軸方向に速度 $-V$ で運動することに注意する．

以下では, $h(V)$ の代わりに $\sigma(V) := h(V)/f(V)$ を用いる.

(5) S 系に対して速度 v で運動する物体 P は, S$'$ 系に対し速度 $v' = \dfrac{v - V}{1 - V\,\sigma(V)\,v}$ で運動して見えることを示せ.

(6) 原理 2. より $\sigma(V) = 1/C^2$ を導き, 変換 (6), (7) が Lorentz 変換となることを示せ.

以上は, Lorentz 変換を導くよく知られた議論であるが, 小問 (5) までは, 原理 0. & 1. だけで成立した. そこで, 原理 2. を仮定せずに, どこまで主張できるかを考察しよう.

S$'$ 系に対し, x' 軸方向に速度 W で等速直線運動する第 3 の慣性系 S$''$ を導入し, その慣性座標を (t'', x'') とする.

(7) S 系の慣性座標を S$'$ のそれに変換する Eq.(6) を $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \hat{M}(V) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ の形にまとめ, (2×2)-行列 $\hat{M}(V)$ を求めよ. ただし, $f(V)$, $\sigma(V)$ を用いて表すこと[*5].

同様に, S$'$ 系の慣性座標を S$''$ のそれに変換する式から行列 $\hat{M}(W)$ が得られる. そして, S 系に対する S$''$ の速度を U として, S 系の慣性座標を S$''$ のそれに変換する式より行列 $\hat{M}(U)$ が得られる.

(8) $\hat{M}(U) = \hat{M}(W)\,\hat{M}(V)$ が成立することを示せ. またこれより, $\sigma(V)$ が速度の逆数の 2 乗の次元をもつ, 慣性系の速度によらない定数となることを示せ.[*6]

[*5] その方が綺麗である.

[*6] このように, 座標変換と速度の合成則の無矛盾性から, 許される座標変換が普遍定数の選び方だけを残して決まってしまう. この普遍定数をゼロとするのが Galilei 変換, ゼロでない正の有限値とするのが Lorentz 変換である. つまり, 原理 0. と 1. だけから, Galilei 変換と Lorentz 変換しか許されないことが分かる.