# 関数としてのベクトル, ベクトルとしての関数

量子力学では,「関数はベクトルである」ということを強く意識し, また, 利用している. この点が飲み込めると,

「固有値方程式 $\quad -i\hbar\,\partial\psi_k(x)/\partial x \;=k\,\psi_k(x)\quad$ を解き, 固有値 $k$ と固有関数 (ベクトル) $\psi_k$ を求めよ.」

といった言葉遣いが自然に理解できる.

「関数はベクトルである」ことを理解するには, まず, 関数やベクトルをできるだけ抽象的に捉え直す必要がある. そこでまず, それらの抽象的な定義を [付録 A] に与えた. (内容を理解できるにこしたことはないが, いまはできなくともよい. 表記法だけ見て次に進んでもよい.)

そこに書かれていることを言葉にすると,

「関数とは写像のことであり, 写像とは,『あるものに, 一意に何かを結びつける**機能**』のことである」
「ベクトル空間 (ベクトル) とは,『ある一定の性質をみたす**算法**』をもつ集合 (の要素)」

となる. 算法は写像の一種なので, 結局, 関数もベクトルも**機能**に着目して定義されていることになる.

## 1 関数としてのベクトル

「関数はベクトルである」という話の前に, 高校までのイメージで思い描くベクトルは, 関数でもあることを見る.

### 1.1 関数としての成分量

まず, 次のような 2 成分量を考える (まだベクトルではない). なお, 各成分値[*1] は複素数とする.

$$\breve{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\ ,$$

見慣れない記号 ˘ は, 単に成分量を意味し, 普通の数と区別するために導入したものである. つまり, 上式は,

$$\breve{A}\text{ は, 第 1 成分が } a_1\text{, 第 2 成分が } a_2 \text{ で与えられる 2 成分量である} \qquad (\star)$$

ということを意味するだけである.

さて, これを強引に写像 (つまり, 関数) とみなせないか？考えてみよう. 写像とは, その定義より, つまるところ,「あるもの (集合 $X$ の要素) に, **一意に**何か ($Y$ の要素) を結びつける**機能**」のことである. これを踏まえて, もう一度 ($\star$) を眺めてみると, その意味するところは,「$\breve{A}$ は, 第 1 成分に複素数 $a_1$ を, 第 2 成分に複素数 $a_2$ を結びつける」という, まさに「機能」である. 第 1 成分, 第 2 成分というのが面倒ならば,「$\breve{A}$ は, 整数 1 に複素数 $a_1$ を, 整数 2 に複素数 $a_2$ を $\cdots$」と言ってもよい.

そう考えると $\breve{A}$ は立派な関数であり, それを強調した書き方 $A(\ )$ をすれば,

$$\breve{A}:\ \{1,2\}\to\mathbb{C}\ ,\qquad\qquad \breve{A}:\ n\ \mapsto\ A(n):=a_n\qquad (n=1,2)\ ,$$

と書ける. つまり, $\breve{A}$ は, 整数 1, 2 に複素数である成分値 $a_1, a_2$ を結びつける関数とみなせる.

これまでは 2 成分量を考えたが, これが一般に $N$ 成分量, はては無限個の成分をもつ場合であっても, 同様にして「〜成分量 $\breve{A}$」を関数とみなせることが理解できるだろう ($\mathbb{Z}$ は整数集合):

$$\breve{A}:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{C}\ ,\qquad \breve{A}:\ n\ \mapsto\ A(n):=a_n\qquad (n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)\ . \tag{1.1}$$

[*1] 「成分量」と「成分値」は別物である. 「成分値」の集まりが, 総体としての「成分量」である.

このようにして, 無限個の成分をもつ成分量は「整数に成分値を結びつける」関数とみなせる. ところで, Eq.(1.1) で用いられた整数 $n$ の役割は, 「各成分を区別するための指標」, 単にそれだけである. そうであれば, 各成分を区別する指標として $n\sqrt{2} \quad (n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots)$ を用いても良いだろうし, さらには, すべて大きさが異なる実数 $\{\, x_n \,\} \quad (\cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots)$ を指標に用いても良いはずである. もちろん, 隣との間隔 $(x_{n+1} - x_n)$ が等間隔である必要もない. つまり,

$$\breve{A} : \{\, x_n \,\} \to \mathbb{C} \, , \qquad \breve{A} : x_n \ \mapsto \ A(x_n) := a_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \, , \tag{1.2}$$

であり, 成分量は「実数に成分値を結びつける」関数としても理解できることが分かる.

## 1.2 成分量をベクトルにする

再び, 2 成分量の話に戻る. 複数の 2 成分量が与えられたとき, それら間に算法が何もなければ, 当然何も起こらない. ただ, 複数の 2 成分量がある, それだけである. そこで, 内容をもたせるために, 2 成分量

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \, , \qquad \breve{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \, , \tag{1.3}$$

の間に算法 $\dot{+}$ を次のように導入する：

$$\breve{A} \dot{+} \breve{B} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \, . \tag{1.4}$$

算法 $\dot{+}$ が先に述べたベクトル空間の定義で必要な「加法」の性質 (A.2 参照) をみたすことは, 容易に確かめられる. さらに, 複素数 $\alpha$ と 2 成分量 $\breve{A}$ の間に, もう一つの算法 $*$ を次のように導入する：

$$\alpha * \breve{A} = \begin{pmatrix} \alpha\, a_1 \\ \alpha\, a_2 \end{pmatrix} \, . \tag{1.5}$$

算法 $*$ が「スカラー倍」の性質 (A.2 参照) をみたすことも, 容易に分かる. これで 2 成分量がベクトルになった.

もちろん, 一般の成分量 (例えば, 無限個の成分をもつ成分量) の集合に対しても, 算法 $\dot{+}$ と $*$ を同様に導入すれば, その成分量はベクトルとなる： 任意の複素数 $\alpha$ と無限個の成分をもつ成分量

$$\breve{A} = \big(\, a_n \,\big)_{n \in \mathbb{Z}} \, , \qquad \breve{B} = \big(\, b_n \,\big)_{n \in \mathbb{Z}} \, ,$$

に対し, 加法 $\dot{+}$ とスカラー倍 $*$ を

$$\breve{A} \dot{+} \breve{B} = \big(\, a_n + b_n \,\big)_{n \in \mathbb{Z}} \, , \tag{1.6}$$

$$\alpha * \breve{A} = \big(\, \alpha\, a_n \,\big)_{n \in \mathbb{Z}} \, . \tag{1.7}$$

のように導入すると, 成分量はベクトルの性質をもつ.

以下では, 成分量がベクトルの性質をもつことを強調したいとき, 太字で書くことにする. (例えば, $\breve{A} \leftrightarrow \boldsymbol{A}$)

## 1.3 ベクトル算法を写像に導入されたものとして見る

成分量に「ある一定の性質をみたす算法」を導入することで, ベクトルが出来上がった. ところで, 前々節で「成分量は写像である」ことを見た. そこで, 成分量に導入された「ある一定の性質をみたす算法」を, 写像に導入された算法と見た場合, どのようなものなのか調べてみる.

以下では, 無限個の成分からなる成分量を, Eq.(1.1) を通して写像と考えることにする. つまり,

$$\breve{A} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \, , \qquad \breve{A} : n \ \mapsto \ A(n) := a_n \, , \tag{1.8}$$

$$\breve{B} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \, . \qquad \breve{B} : n \ \mapsto \ B(n) := b_n \, , \tag{1.9}$$

などである.

さて, 成分量に導入された算法 $\dot{+}$ (Eq.(1.4) の成分無限個版) は, 写像に導入された算法としてみると, 成分量 $\breve{A} \dot{+} \breve{B}$ に対応する写像を $\big[\, A \dot{+} B \,\big]$ と記すことにすれば,

$$\breve{A} \dot{+} \breve{B} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \, , \qquad \breve{A} \dot{+} \breve{B} : n \ \mapsto \ \big[\, A \dot{+} B \,\big](n) := a_n + b_n \, , \tag{1.10}$$

と表せる．一方, $a_n + b_n = A(n) + B(n)$ なのだから, 当然,

$$\text{任意の整数 } n \text{ に対して} \qquad \big[\,A \dotplus B\,\big](n) = A(n) + B(n)\ , \tag{1.11}$$

ということになる．これは, 整数を引数にもつ (括弧 ( ) の中に整数が入る) 二つの関数 $A$ と $B$ との間に定義された, 通常の「関数の和」の算法に他ならない．

次に, 成分量に導入された算法 $*$ (Eq.(1.5) の成分無限個版) をみてみる．成分量 $\alpha * \breve{A}$ に対応する写像を $\big[\,\alpha * A\,\big]$ と記せば,

$$\alpha * \breve{A}\ :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}\ , \qquad \alpha * \breve{A}\ :\ n\ \mapsto\ \big[\,\alpha * A\,\big](n) := \alpha\, a_n\ , \tag{1.12}$$

と表せるが, その一方で, $\alpha\, a_n = \alpha\, A(n)$ なので, 当然,

$$\text{任意の整数 } n \text{ に対して} \qquad \big[\,\alpha * A\,\big](n) = \alpha\, A(n)\ , \tag{1.13}$$

である．これは, 複素数 $\alpha$ と整数を引数にもつ関数 $A$ との間に定義された, 通常の「関数のスカラー倍」の算法そのものである．

以上の事柄は, 成分量を Eq.(1.2) を通して写像と考えた場合にも成立する．いずれにしても, ベクトル算法「加法・スカラー倍」は, ベクトル (成分量) を写像として見た場合, 単に「関数の和・関数のスカラー倍」に他ならないことが分かる．

## 1.4 内積

ここまで来たら, ついでに内積のことも調べてみる．

内積は, ベクトルの定義に関わる「加法・スカラー倍」とは別に, 新たにベクトル空間に導入される算法である．そして, 内積が定義されたベクトル空間[*2] を **Hilbert 空間**という．

さて, よく知っている実ベクトル空間に導入される内積は, 例えば 2 次元実ベクトル空間ならば, [*3]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\ , \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \big(\,\boldsymbol{A}\,,\ \boldsymbol{B}\,\big) = a_1\, b_1 + a_2\, b_2\ , \tag{1.14}$$

である．これが複素ベクトル空間ならば,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\ , \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \langle\ \boldsymbol{A}\,,\ \boldsymbol{B}\ \rangle = a_1^*\ b_1 + a_2^*\ b_2\ , \tag{1.15}$$

となる.[*4] ここで, 複素ベクトルの内積を表す記号 $\langle\ \ ,\ \ \rangle$ は, 実ベクトル空間の内積の計算手順と若干異なる (第 1 スロットに入るベクトルの成分値をすべて複素共役にする) ことを意識するために, 実ベクトル空間の内積記号と別にしたかったので導入した．

無限次元複素ベクトル空間の内積ならば, $n \in \mathbb{Z}$ として

$$\boldsymbol{A} = (a_n)\ , \quad \boldsymbol{B} = (b_n) \qquad \longrightarrow \qquad \langle\ \boldsymbol{A}\,,\ \boldsymbol{B}\ \rangle = \sum_n a_n^*\ b_n\ , \tag{1.16}$$

である．この複素ベクトル空間の内積 (1.16) の右辺を, ベクトル $\boldsymbol{A}$ の写像 (関数) の表現 (1.2) で表すと,

$$\langle\ \boldsymbol{A}\,,\ \boldsymbol{B}\ \rangle = \sum_n \big[\,A(x_n)\,\big]^*\ B(x_n)\ , \tag{1.17}$$

となる．

これら見慣れた内積の表記によらない, より抽象的で汎用性のある内積の定義を [付録 A] に与えておく．

---

[*2] 正確には, 「内積が定義された**完備な**ベクトル空間を Hilbert 空間という」である．完備性については, ここでは略す．なお, 内積が定義された**有限次元**ベクトル空間は, 自動的に完備である．

[*3] ベクトルの性質をもつ成分量であることが明示されているので, 強調して $\breve{A} \to \boldsymbol{A}$ などと, 太字で書いている．

[*4] 数学の文献では, 複素数 $a$ の複素共役を $\bar{a}$ で表すが, 物理では $a^*$ と表すことが多い．また, 数学では, $\langle\ \boldsymbol{A}\,,\ \boldsymbol{B}\ \rangle = a_1\ \bar{b}_1 + a_2\ \bar{b}_2$ のように第 2 スロットに入る $\boldsymbol{B}$ の成分値をすべて複素共役にし, 物理で多く用いられる定義と異なるが, これらは, 内積の本質的な定義と無関係な慣習上の違いである．

# 2 ベクトルとしての関数

これから, 本題の「関数はベクトルである」という話に進むが, その前に, 前章で分かったことをまとめると,

a) 成分量は, 「その第 $n$ 番目の**成分に成分値を一意に結びつける機能**」によって, **関数**とみなせる.
b) 成分量の間に**加法**と**スカラー倍**を導入することで, 成分量は, はじめてベクトルになる.
c) ベクトルを関数とみなすと, 「加法・スカラー倍」は, 関数としての「和・スカラー倍」に対応する.

以上である.

「関数はベクトルである」ことは, ベクトルの抽象的な定義 — 「ベクトルとは, 『ある一定の性質をもつ算法 (加法・スカラー倍)』をもつ集合の要素である」— に戻って確かめればよい. 具体的には,「関数の和・関数のスカラー倍」が, ベクトルの定義に関わる「加法・スカラー倍」の性質をもつことを示せばよい. それで終わりである.

ここでは, それを諄く (前章でやった手続きを逆にするだけであるが) やってみる.

## 2.1 成分量としての関数

a) の具体的内容は, Eqs.(1.1), (1.2) で与えられているが, 再度ここに記す.

$$\breve{A} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} , \qquad \breve{A} : n \mapsto A(n) := a_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) , \tag{2.1}$$

$$\breve{A} : \{x_n\} \to \mathbb{C} , \qquad \breve{A} : x_n \mapsto A(x_n) := a_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) , \tag{2.2}$$

ここで, $\cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots$ である. これらは, 「成分量は『整数 or 実数に成分値を結びつける』関数である」という主張であり, そこで $n$ や $x_n$ がはたす役割は「各成分を区別するための指標」,「成分の区別」である.

以上を踏まえて, 一変数関数

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} , \qquad F : x \mapsto F(x) , \tag{2.3}$$

を成分量とみなせるか？考えてみる. 関数 $F$ を成分量とみるには, 各成分を表す指標が必要だが, それは, Eq.(2.2) から容易に想像が付く. Eq.(2.3) の第 2 式は, 「関数 $F$ によって $x \in \mathbb{R}$ に結びつく**関数値**を $F(x)$ と書く」という宣言みたいなものだが, この $x$ が, まさにその役割を担える. 定義域 $\mathbb{R}$ の個々の要素を大きさの順に並べれば, それらは「成分を区別する指標」の働きができるからである.*5

Eq.(2.1) は, 「成分量 $\breve{A}$ の, 第 $n$ 成分の値 (成分値) は, $A(n)$ である」と読める. これと対比すると, 関数値 $F(x)$ は, 『第 $x$ 成分の値 (成分値)』に見える. つまり, Eq.(2.3) は

「"成分量 $F$" の "第 $x$ 成分" の値は $F(x)$ である」

と読める. このように,「関数 $F$ は成分量とみなせる」こと, そして,「そのときの "第 $x$ 成分" の値 (成分値) は, 関数値 $F(x)$ である」ことが分かった. 以上から, 成分量としての関数の側面を強調したければ, 「関数値」$F(x)$ の代わりに「成分値」$F_x$ と記す*6 と, "気分が出る" ことが分かる.

**注)** ここまでを注意深く読んだ人は,

- 「関数 $F$」と書いてはあっても「関数 $F(x)$」と書いていない
- $F(x)$ が用いられている箇所は必ず「関数値 $F(x)$」となっている

ことに気付いているかもしれない. 物理では, よく, 「時間の関数 $x(t)$」や「波動関数 $\psi(t, x)$」というような言い回しをよくする. しかしこれでは, 機能を表す「関数」なのか, それとも, $x(-1), x(10)$ などと同様に「特定の時刻 $t$ における数値 $x(t)$」の意味なのか, 少し曖昧である.

普通は, 「時間の関数 $x(t)$」と書かれたら, この括弧の中の $t$ は, 無限の過去から未来までの任意の $t$, と翻訳して読んでいるはずである. つまり, $t$ に (実数なら) 何を与えても, それに応じて値 $x(t)$ を返す機能 =

*5 ただし, $\mathbb{Z}$ は可算無限集合 (その要素を一個二個, ..., と数えられる) なのに対し, $\mathbb{R}$ は非可算無限集合という違いはあるが, ここでは立ち入らない.
*6 Eq.(2.2) などに合わせるなら, 小文字を使って $f_x$ とした方が良いかも知れないが, 本質とは無関係.

関数と見ている. 例えば, 具体的に $x(t) = t^2$ の場合, 左辺の括弧の中の $t$ は一種の窓口で, そこに $t = 2$ が放り込まれたら, それを右辺の $t$ に渡し, 右辺に与えられた計算手順にしたがって, 計算結果 4 を出す, また別の $t$ の値を括弧の中に与えたら, ... , という具合だ.
この「括弧の中の $t$ は一種の窓口である」という見方を強調するには, 関数を $x(\bullet)$ で表し, $x(t)$ には, あくまでも「特定の時刻 $t$ における数値」という役割を与える記法が便利である.
数学の文献は, この点についてしっかり区別した書き方をしていて, 関数というときには「関数 $x$」を使い, $x(t)$ には「特定の時刻における数値」の役割のみ与える, としている (と思う).

何をごちゃごちゃ言っているのか？と感じる人は, 例えば $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots)$ で与えられるベクトルに対し,「ベクトル $\boldsymbol{a}$」や「ベクトル $(a_k)$」という表現と,「ベクトル $a_2$」や「ベクトル $a_k$」とを比べてみるとよい.

## 2.2 関数をベクトルにする

ここまで, はっきり言ってこなかったが,「関数はベクトルである」というときの「関数」は, 単に「あるものに, 一意に何かを結びつける機能」だけでなく, 関数の間に算法 (通常の「関数の和や関数のスカラー倍」) が定義されているものを指している.

そこで関数の間に算法を導入しよう. 以下では, 実数を複素数に結びつける関数からなる集合 ($\mathcal{F}$ とする) を念頭に置いて話を進める.

まず, 加法であるが, $\mathcal{F}$ の任意の 2 つの要素を $F, G$ とすると, 当然それらは

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} , \qquad F : x \mapsto F(x) ,$$
$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{C} , \qquad G : x \mapsto G(x) ,$$

である. さて, ここに, 加法 $\dot{+}$ を次のように導入する

$$[F \dot{+} G] : \mathbb{R} \to \mathbb{C} , \qquad [F \dot{+} G] : x \mapsto [F \dot{+} G](x) := F(x) + G(x) . \tag{2.4}$$

つまり, 前節の注) で書いた記法を使うと,

$$[F \dot{+} G](\bullet) := F(\bullet) + G(\bullet) \tag{2.5}$$

で「関数の加法 $\dot{+}$」を定義した, ということである. 何ということはない, 通常我々が行っている「関数の和」の計算と同じである. この加法が, 確かにベクトル空間の定義に必要な性質 (A.2 参照) をみたすことは, 容易に確かめられる.

次にスカラー倍であるが, 任意の複素数 $\alpha$ と関数 $F$ のスカラー倍を

$$[\alpha * F] : \mathbb{R} \to \mathbb{C} , \qquad [\alpha * F] : x \mapsto [\alpha * F](x) := \alpha F(x) , \tag{2.6}$$

で定義する. これも, 前節の注) で書いた記法で書けば,

$$[\alpha * F](\bullet) := \alpha F(\bullet) \tag{2.7}$$

であって, 通常我々が行っている「関数のスカラー倍」と同じである. このスカラー倍が, ベクトル空間の定義に必要な性質 (A.2 参照) をみたすことも, 容易に確かめられる.

このように, 通常行っている「関数の和 (2.5)・スカラー倍 (2.7)」によって,「関数はベクトル」になっている.

## 2.3 関数の算法を成分量に導入されたものとして見る

「関数はベクトルである」ことを formal に示すには, 前節で示したことで終わりであるが, 折角, 前々節で写像 (関数) は成分量とみなせることを見たので, 先に導入した「関数の和 (2.5)・スカラー倍 (2.7)」が, 関数を成分量とみなした場合にどう見えるのか確かめてみよう.

気分を出すために, 関数 $F$ を成分量とみなし, その成分値を $F_x$ で表すことにする. (当然, $F_x := F(x)$ である.) すると, 成分量 $\breve{A} = (\cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots)$ を $\breve{A} = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ と略記する場合を真似れば, 成分量としての関数 $F$ は, $F = (F_x)_{x\in\mathbb{R}}$ と書ける.

さて, Eqs.(2.5), (2.7) は諄く書けば,

$$[F \dot{+} G](x) := F(x) + G(x) \qquad \text{各 } x \text{ について}$$
$$[\alpha * F](x) := \alpha F(x) \qquad \text{各 } x \text{ について}$$

という意味である. これを成分量として解釈すれば, 関数値 $F(x)$ は成分値 $F_x$ に対応するのだから,

$$F \dot{+} G = \bigl( [F \dot{+} G]_x \bigr)_{x\in\mathbb{R}} := \bigl( F_x + G_x \bigr)_{x\in\mathbb{R}} \tag{2.8}$$
$$\alpha * F = \bigl( [\alpha * F]_x \bigr)_{x\in\mathbb{R}} := \bigl( \alpha F_x \bigr)_{x\in\mathbb{R}} \tag{2.9}$$

となる. これらは, 成分量に導入された加法 (1.6), スカラー倍 (1.7) と同じである.

## 2.4 内積

関数 $F$ を成分量と見立て, その関数値 $F(x)$ を成分量 $F_x$ と同一視することが自然に感じられるようになると, 関数集合に内積を導入する具体的方法が, Eqs.(1.16), (1.17) などから得られる.

例えば, Eq.(1.16) は, 無限次元複素ベクトル空間の内積を

$$\boldsymbol{A} = \bigl( a_n \bigr)_{n\in\mathbb{Z}} , \quad \boldsymbol{B} = \bigl( b_n \bigr)_{n\in\mathbb{Z}} \qquad \longrightarrow \qquad \langle\, \boldsymbol{A} ,\, \boldsymbol{B} \,\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^* \, b_n , \tag{2.10}$$

で与えるが, これを素直に関数集合に拡張すると,

$$F = \bigl( F_x \bigr)_{x\in\mathbb{R}} , \quad G = \bigl( G_x \bigr)_{x\in\mathbb{R}} \qquad \longrightarrow \qquad \langle\, F ,\, G \,\rangle \stackrel{?}{=} \sum_{x\in\mathbb{R}} F_x^* \, G_x ,$$

が示唆される. $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{R}}$ が意味不明であるが, これを自然に, 積分と解釈すれば, 複素数値をとる関数の間の内積を

$$F(\bullet) ,\ G(\bullet) \qquad \longrightarrow \qquad \langle\, F ,\, G \,\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \, \bigl[ F(x) \bigr]^* \, G(x) , \tag{2.11}$$

で定義するのは自然である. そして実際, この内積の定義が, 抽象的な内積の定義 (A.3 参照) で必要な性質を満たすことが示せる.*7

**注)** Eq.(2.11) で与えられた内積は, もちろん, 最後の積分が意味をもつ (積分可能) であるときのみ意味がある. 例えば, $-\infty < x < \infty$ (定義域が $\mathbb{R}$) で与えられる関数, 1 (つまり定数) と $x^2$ との内積や, 1 と $1/x^2$ との内積は, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} dx\, x^2 = +\infty$ , $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} dx\, 1/x^2 = +\infty$ となって定義できない.

もし, 定義域が有界な $-1 < x < 1$ であれば, 1 と $x^2$ との内積は定義できるが, 1 と $1/x^2$ との間の内積は相変わらず定義できない.

このように, 関数集合をベクトル空間とみなし, その中に内積を Eq.(2.11) で導入できるものの, それはあくまでも「形式的に」であって, 本当に内積が定義できいるか否か, 吟味する必要がある. 別の言い方をすると, 関数集合はベクトル空間であるが, Hilbert 空間 (= 内積をもつベクトル空間) を構成しようとすると, そのメンバー (Hilbert 空間に属する関数) を厳選しなければならない.

量子力学では, 系の状態を波動関数で表すが, 確率解釈が可能であるために, 波動関数は Hilbert 空間に属さなければならない. だから, 量子力学の問題を考えるときは, 常に, 扱っている波動関数が実際に Hilbert 空間に属しているか否か, 吟味しながら議論を進めなければいけない.*8

たとえ, 厳密なことは分からなくても, $-\infty < x < \infty$ を定義域とする関数として, 「$e^{-\lambda x}$ ($\lambda$ は実数) は Hilbert 空間に属さないが, $e^{-x^2/2}$ は Hilbert 空間に属しそうだ」程度のことは分からなければならない.

*7 内積の性質のうち, [線形性] と [Hermite 性] を示すのは容易だが, 最後の [正値性](「等号は...」の部分) は難しい問題を含んでいる.

*8 しかしそこは, 数学の成果があるので, 講義等では, 必要ならばそれを拝借してくれば良い, という現実的な態度をとることにする.

# 3　ベクトル空間の基底 — 二乗可積分関数空間と Fourier 変換

## 3.1　基底系

## 3.2　ベクトルの成分表示

## 3.3　基底系の変換とベクトルの成分表示

## 3.4　二乗可積分関数の Fourier 変換

# 4　線形演算子 — 行列と微分演算子

## 4.1　線形演算子としての行列

## 4.2　線形演算子の行列表示

## 4.3　基底系の変換と行列表示

## 4.4　線形演算子としての微分演算子

## 4.5　微分演算子の行列表示

## 4.6　基底系の変換と微分演算子の行列表示— Fourier 空間での微分演算子の表現

# 付録 A　抽象的な定義： 写像 (関数), ベクトル, 内積

## A.1　関数

関数とは**写像**のことである. その定義は, 次の通り.

**写像**または**関数**

$X, Y$ を集合とするとき, $X$ の任意の要素 $x$ に対し, $Y$ の要素 $y$ を一意に定める規則 $f$ が与えられているとき, $f$ のことを $X$ から $Y$ への**写像**といい, 次のように記す：

$$f:\ X \to Y\ , \qquad\qquad x \mapsto y = f(x)\ .$$

## A.2　ベクトル

ベクトルというと, すぐ“矢印” や成分量を思い浮かべると思うが, 幾何的なイメージなどのこれまでに身につけた先入観を捨て, その機能に着目すると, 次のようになる：

**ベクトル空間**

**加法**と**スカラー倍**が定義された集合をベクトル空間といい, その要素をベクトルという.
ここで, 「加法」と「スカラー倍」は以下に定義される写像である.

**加法：**　集合 $M$ の任意の要素 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$ に対し定義された写像 $M \times M \to M$ $\big(\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{a} \dot{+} \boldsymbol{b} \in M\ \big)$ が次の性質をもつとき, それを加法 (つまり和) という.

加 1.　$\boldsymbol{a} \dot{+} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \dot{+} \boldsymbol{a}$　　$(\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M)$　　(可換則)
加 2.　$(\boldsymbol{a} \dot{+} \boldsymbol{b}) \dot{+} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \dot{+} (\boldsymbol{b} \dot{+} \boldsymbol{c})$　　$(\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in M)$　　(結合則)
加 3.　任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$ に対し, 方程式 $\boldsymbol{a} \dot{+} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x} \in M$ が少なくとも一つ存在する.

**スカラー倍：**　集合 $K$ (実数集合 $\mathbb{R}$ または 複素数集合 $\mathbb{C}$) [a] の任意の要素 $\alpha \in K$ と $M$ の任意の要素との間に定義された写像 $K \times M \to M$ $\big(\ (\alpha, \boldsymbol{a}) \mapsto \alpha * \boldsymbol{a} \in M\ \big)$ で, 次の性質をみたすものをスカラー倍という.

倍 1.　$\alpha * (\boldsymbol{a} \dot{+} \boldsymbol{b}) = \alpha * \boldsymbol{a} \dot{+} \alpha * \boldsymbol{b}$　　$(\forall \alpha \in K,\ \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M)$
倍 2.　$(\alpha + \beta) * \boldsymbol{a} = \alpha * \boldsymbol{a} \dot{+} \beta * \boldsymbol{a}$　　$(\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall \boldsymbol{a} \in M)$
倍 3.　$(\alpha\beta) * \boldsymbol{a} = \alpha * (\beta * \boldsymbol{a})$　　$(\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall \boldsymbol{a} \in M)$
倍 4.　$1 * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$　　$(\forall \boldsymbol{a} \in M)$

[a] 一般的には, 「体」という性質をもてば何でもよい.

頭の痛くなる定義だが, 認識すべきことは, 「(上に記された) ある一定の性質をみたす算法をもつ集合」であれば, どんな集合 (の要素) であっても, すべて, ベクトル空間 (ベクトル) である, という点である.

**注** 0)　上に与えられた写像 (関数) の定義は, 余分な構造を排除した, とても原始的なものである. まだ, 関数 $f, g$ や複素数 $\alpha$ の間に $f + g$ や $\alpha f$ という算法が与えられていないことに注意.

**注** 1)　加法の 3 つの性質から, ベクトル算でよく使う次の性質が導かれる：

加 4.　すべての $\boldsymbol{a} \in M$ に対し, $\boldsymbol{a} \dot{+} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ をみたす $\boldsymbol{0} \in M$ が**唯一つ**存在する.　　(単位元の存在)
加 5.　任意の $\boldsymbol{a} \in M$ に対し, $\boldsymbol{a} \dot{+} \tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\tilde{\boldsymbol{a}} \in M$ が**唯一つ**存在する.　　(逆元の存在)
加 3'.　任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$ に対し, 方程式 $\boldsymbol{a} \dot{+} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x} \in M$ が**唯一つ**存在し, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{a}}$ で与えられる.

さらに, 加 5. と加 3'. から $\boldsymbol{a} = (\tilde{\boldsymbol{a}})\tilde{}$ が導かれる.

**注** 2) 加法とスカラー倍の性質をあわせると, 次が示される.

- $0 * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ $\quad (\forall \boldsymbol{a} \in M)$ $\quad$ (加 4. と 倍 2. より)
- $(\alpha * \boldsymbol{a})\tilde{} = (-\alpha) * \boldsymbol{a}$ $\quad (\forall \alpha \in K,\ \forall \boldsymbol{a} \in M)$ $\quad$ (加 5. と 倍 2. より)

**注** 3) $\dot{+}$ を $+$ と記し, $*$ を省略する. また, $\tilde{\boldsymbol{a}}$ を $-\boldsymbol{a}$ で表し, さらに $\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}) =: \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ として減法 $-$ を定義すれば, 通常のベクトル算の記法となる.

## A.3 内積

内積の抽象的な定義も, 「ある一定の性質をもつ算法」として与えられている.

**内積**

ベクトル空間 $V$ の要素 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対し定義された写像 $V \times V \to \mathbb{C}$ $\big(\,(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) \mapsto \langle\, \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\,\rangle \in \mathbb{C}\,\big)$ が以下の性質をみたすとき, その写像を内積という.

i) **線形性**: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ に対し, $\quad \langle\, \boldsymbol{c},\ (\alpha * \boldsymbol{a}) \dot{+} (\beta * \boldsymbol{b})\,\rangle = \alpha \langle\, \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\,\rangle + \beta \langle\, \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}\,\rangle$

ii) Hermite **性**: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対し, $\quad \langle\, \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\,\rangle = \langle\, \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\,\rangle^*$

iii) **正値性**: $\|\,\boldsymbol{a}\,\|^2 := \langle\, \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\,\rangle \geq 0$ であり, 等号は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときのみ成立する.