物 理 学 演 習 (改訂版)

ベクトル解析, 電磁気学　ショートコース　2005 年 11 月 1 日

1　ベクトル, ベクトルの微積分

1.1　ベクトル

n 次元空間のデカルト座標を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とし, それぞれの軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ で表すことにする.

また特に, 3 次元空間の場合, 1 軸, 2 軸, 3 軸を x, y, z で表し, それぞれの軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ で表すこともある.

1.1.1　ベクトルの内積（スカラー積とも言う）

定義　(実) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積は, 次のように定義される：

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} := |\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}|\ \cos\theta \tag{1.1}$$

ここで θ は, 二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が張る平面内でそれらが成す角度である. また, $|\boldsymbol{A}|$ はベクトル $\boldsymbol{A}$ の長さで, デカルト座標での成分表示が

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n}\ A_i\, \boldsymbol{e}_i \tag{1.2}$$

であるとき,

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2} \tag{1.3}$$

で与えられる.

重要なことは, この内積の幾何的な定義から明らかなように, **内積は座標変換に対して不変**な点である.

1.1.2　ベクトルの外積（ベクトル積とも言う）

とりあえず 3 **次元ベクトルに対してのみ**定義されていることに注意 (ただし, この外積の概念を高次元に拡張したものが存在するので, " とりあえず " とした. 興味のある人は, (外) 微分形式の外積などを参照.).

定義　3 次元 (実) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積は, 次のように定義される：

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} := (|\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}|\ \sin\theta)\ \boldsymbol{e}_C \tag{1.4}$$

ここで, θ はベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が成す角度. ベクトル $\boldsymbol{e}_C$ は, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が張る平面の単位法線ベクトル ($|\boldsymbol{e}_C| = 1$) で, その向きは, 「右ネジの規則」($\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ の方向に右ネジを回したときに, そのネジが進む向きを選ぶ) に従う.

重要なことは, この幾何的な定義から明らかなように, **外積は座標変換に対してベクトルとして変換する**点である.

1.1.3　ベクトルの三重積

ベクトルに対する三種類の「積」— (1) ベクトルのスカラー倍 (2) 内積 (3) 外積 — が定義されている.

そこで, 3 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対して, 三種類の積を形式的に組み合わせると,

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) & \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) & \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \\ \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) & \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) & \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \\ \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) & \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) & \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \end{array} \tag{1.5}$$

ができるが, これら 9 つのうち意味のある (定義されている) ものは,

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \qquad \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \qquad \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{1.6}$$

の 3 つである. 最後のものは, 次のようにも表せる.

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.7}$$

1.1.4　完全反対称テンソルとベクトルの外積

ベクトルの外積を**デカルト座標で**成分表示するには, 完全反対称テンソルを用いると便利である. (3 階の) 完全反対称テンソルとは,

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} +1 & \text{for} \;\; (i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の偶置換} \\ -1 & \text{for} \;\; (i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{for} \;\; \text{その他} \end{cases} \tag{1.8}$$

で定義されるのもで, 任意の一組の添字の入れ替えに対して反対称 $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$ という性質を持つ (よって当然, 同じ添字が登場するとゼロとなる：$\epsilon_{iij} = 0$ など).

この完全反対称テンソルを用いて, ベクトル積の**デカルト座標での**成分表示は次のように表される：

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, A_j\, B_k \tag{1.9}$$

完全反対称テンソルの性質

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{lmk} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl} \tag{1.10}$$

を用いれば, Eq.(1.7) を示すことは容易である.

この完全反対称テンソルを用いる記法は, 後述する「回転」 rot の**デカルト座標での**成分表示, および, その性質を調べる際にも非常に便利である.

1.2　ベクトルの微積分

1.2.1　ベクトルの微分

ベクトル $\boldsymbol{A}$ が変数 t の関数であるとき, ベクトル $\boldsymbol{A}$ をベクトル関数といい, 明示的に $\boldsymbol{A}(t)$ と表す. デカルト座標の成分で書けば,

$$\boldsymbol{A}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\,\boldsymbol{e}_i(t) \tag{1.11}$$

である.

定義

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の微分は, 次のように定義される：

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \tag{1.12}$$

デカルト座標での成分表示は, **デカルト座標軸が動かない場合**,

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dA_i(t)}{dt}\, \boldsymbol{e}_i \tag{1.13}$$

である.

同様に, ベクトルが, t, s, u, $\ldots$ といった多変数に依存する場合も考えることができ, その場合, ベクトルの偏微分が定義される：

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}(t,\, s,\, u,\, \cdots)}{\partial s} := \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t,\, s+\Delta s,\, u,\, \cdots) - \boldsymbol{A}(t,\, s,\, u,\, \ldots)}{\Delta s} \tag{1.14}$$

デカルト座標での成分表示は, **デカルト座標軸が動かない場合**,

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}(t,\, s,\, \cdots)}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i(t,\, s,\, \cdots)}{\partial s}\, \boldsymbol{e}_i \tag{1.15}$$

である.

速度

動点の時刻 t における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とすると, 動点の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は

$$\boldsymbol{v}(t) := \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \tag{1.16}$$

で定義される.

加速度

動点 $\boldsymbol{r}(t)$ の加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ は

$$\boldsymbol{a}(t) := \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} \tag{1.17}$$

で定義される.

1.2.2 ベクトルの積分

n 次元空間の各点にある種の量が定義されているとき, その量を**場**という. つまり, n 次元空間座標の関数のことである. 「ある種の量」がスカラー量のとき, スカラー場といい, ベクトル量のとき, ベクトル場とよぶ.

線積分

n 次元空間中に, 向き付けられた曲線 C が与えられている. C に沿って測った "距離" s によって[*1] C 上の各点を $P(s)$ などと表し, その位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(P) = \boldsymbol{r}(s)$ と書く. なお, C の始点を $s=a$, 終点を $s=b$ とする. また, スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ の, C 上の点 $P(s)$ における値 $f\big(\boldsymbol{x}(P)\big) = f\big(\boldsymbol{r}(s)\big)$ を $f(s)$ と略記する.

[*1] 実際の距離である必要はまったくなく, 単に C 上の点を一対一で表すパラメータであれば何でも良い.

このとき, 「曲線 C に沿ったスカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ の線積分」は,

$$\int_C ds\ f := \int_a^b ds\ f(s) := \lim_{\Delta s_k \to 0} \sum_k \Delta s_k f(s_k) \tag{1.18}$$

のように, 曲線 C を細かく分割して与えられる量の総和の極限として定義される.

同様に, 曲線 C に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の積分は

$$\int_C ds\ \boldsymbol{A} := \int_a^b ds\ \boldsymbol{A}(s) := \lim_{\Delta s_k \to 0} \sum_k \Delta s_k \boldsymbol{A}(s_k) \tag{1.19}$$

によって, また, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の**線積分**は, スカラー量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \cdot \boldsymbol{A}(s)$ の線積分を経由して

$$\int_C d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A} := \int_a^b ds\ \left(\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \cdot \boldsymbol{A}(s)\right) := \lim_{\Delta s_k \to 0} \sum_k \Delta s_k \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}(s_k) \cdot \boldsymbol{A}(s_k)\right) \tag{1.20}$$

で定義される.

重要なことは, 定義から明らかなように, **線積分は一般に曲線 (経路) C に依存する**.

面積分　線積分の素直な拡張である.

曲面 S 上を各点を, 2 つのパラメター α, β で特徴付けることができるので, 曲面上の点 P を $P = P(\alpha, \beta)$, その位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(P) = \boldsymbol{r}(\alpha, \beta)$ などと表すことにする. このとき, 曲面 S の微少面積要素 (面要素) は, α 方向, β 方向それぞれの微少変位ベクトル, $\delta_\alpha \boldsymbol{r} := d\alpha\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}$ と $\delta_\beta \boldsymbol{r} := d\beta\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}$ が張る微少な平行四辺形の面積 $dS = d\alpha\, d\beta\ \mu_2(\alpha,\, \beta)$ によって与えられる. 例えば, 3 次元空間中の曲面であれば, 外積を利用して

$$dS := |\delta_\alpha \boldsymbol{r} \times \delta_\beta \boldsymbol{r}| = \left| d\alpha\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times d\beta\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \right| = d\alpha\, d\beta\ \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \right| \tag{1.21}$$

となる. つまり, 3 次元の場合, $\mu_2(\alpha,\, \beta) = \left| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \right|$ となる.

また, 曲面 S の表裏を定め, 各点 P での裏から表に向く法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(P)$ で表し, $d\boldsymbol{S} := \boldsymbol{n}\, dS$ で定義されるものを, ベクトル面要素と呼ぶこともある.

このとき, スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ の面積分として $\displaystyle\int_S dS\ f$ と $\displaystyle\int_S d\boldsymbol{S}\ f$ が考えられ, それぞれ次のように定義される：

$$\int_S dS\ f := \iint_S d\alpha\, d\beta\, \mu_2(\alpha,\, \beta)\ f(\alpha, \beta) \qquad (= \text{スカラー量}) \tag{1.22}$$

$$\int_S d\boldsymbol{S}\ f := \iint_S d\alpha\, d\beta\, \mu_2(\alpha,\, \beta)\ \boldsymbol{n}(\alpha, \beta)\ f(\alpha, \beta) \qquad (= \text{ベクトル量}) \tag{1.23}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の面積分も同様に, $\displaystyle\int_S dS\ \boldsymbol{A}$ と $\displaystyle\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A}$ が考えられ, それぞれ

$$\int_S dS\ \boldsymbol{A} := \iint_S d\alpha\, d\beta\, \mu_2(\alpha,\, \beta)\ \boldsymbol{A}(\alpha, \beta) \qquad (= \text{ベクトル量}) \tag{1.24}$$

$$\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A} := \iint_S d\alpha\, d\beta\, \mu_2(\alpha,\, \beta)\ \big[\boldsymbol{n}(\alpha, \beta) \cdot \boldsymbol{A}(\alpha, \beta)\big] \qquad (= \text{スカラー量}) \tag{1.25}$$

で定義される.

さらに 3 次元の場合には $\displaystyle\int_S d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}$ もあり,

$$\int_S d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} := \iint_S d\alpha\, d\beta\ \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \right|\ \big[\boldsymbol{n}(\alpha, \beta) \times \boldsymbol{A}(\alpha, \beta)\big] \qquad (= \text{ベクトル量}) \tag{1.26}$$

で与えられる.

<u>**体積積分**</u>　これも, 線積分の素直な拡張である.

3 次元超曲面 V 上の各点は, 3 つのパラメター α, β, γ によって特徴付けられるので, 超曲面上の点 P を $P = P(\alpha, \beta, \gamma)$, その位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(P) = \boldsymbol{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ などと表すことにする. このとき, 超曲面 S の微少体積要素 (体積要素) は, α, β, γ 方向それぞれの微少変位ベクトル, $\delta_\alpha \boldsymbol{r} := d\alpha\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}$, $\delta_\beta \boldsymbol{r} := d\beta\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}$, そして $\delta_\gamma \boldsymbol{r} := d\gamma\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$ が張る微少な平行六面体の体積 $dv = d\alpha\, d\beta\, d\gamma\ \mu_3(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ によって与えられる. 例えば, 3 次元空間中の場合は, 具体的に

$$dv := |\delta_\gamma \boldsymbol{r} \cdot (\delta_\alpha \boldsymbol{r} \times \delta_\beta \boldsymbol{r})| = \left| d\gamma\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} \cdot \left(d\alpha\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times d\beta\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \right) \right| = d\alpha\, d\beta\, d\gamma\ \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \right) \right| \tag{1.27}$$

と書くことができる. つまり, 3 次元の場合, $\mu_3(\alpha,\, \beta,\, \gamma) = \left| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} \cdot \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \right) \right|$ である.

さてこのとき, スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ の体積積分として $\displaystyle\int_V dv\ f$ が考えられ, 次のように定義される：

$$\int_V dv\ f := \iiint_V d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, \mu_3(\alpha,\, \beta,\, \gamma)\ f(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (= \text{スカラー量}) \tag{1.28}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の体積積分も同様に, $\displaystyle\int_V dv\ \boldsymbol{A}$ が考えられ, 次のように定義される：

$$\int_V dv\ \boldsymbol{A} := \iiint_V d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, \mu_3(u,\, \beta,\, \gamma)\ \boldsymbol{A}(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (= \text{ベクトル量}) \tag{1.29}$$

2　ベクトル解析

先にみたように, スカラー場やベクトル場に対して, さまざまな微積分が定義されるが, その中でも, 物理的意味がはっきりした, いくつかの演算がある.

2.1　積分

2.1.1　仕事量

ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ が, 位置 $\boldsymbol{x}$ に (仮想的に) 存在する質点に働く力を表しているとすると, その質点を微少変位 $d\boldsymbol{x}$ 移動するのに要する仕事量は, $-d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ である. そこで, それをある曲線 C に沿って寄せ集めた

$$-\int_C d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1}$$

は, 経路 C に沿って質点を移動させるのに要する総仕事量となる.

2.1.2　流出量

ベクトル場 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ が, ある物理量の流れを表しているとする. 例えば, 電気量の流れ (電流密度) ならば, 電荷密度を表すスカラー場を $\rho_e(\boldsymbol{x})$, 荷電粒子の速度を表すベクトル場を $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ として, $\boldsymbol{J} = \rho_e\, \boldsymbol{v}$ である.

このとき, $d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{J}$ は, ある物理量 (例えば $\boldsymbol{J}$ を電流密度とすれば, ρ_e) が, 単位時間に微少面要素 dS を ($\boldsymbol{n}$ 方向に) 横切る流出量を意味する. そこで, それを寄せ集めた

$$\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{J} \tag{2.2}$$

は, 曲面 S を (各点で $\boldsymbol{n}$ 方向に) 横切る総流出量を意味する.

2.1.3　総量

スカラー場 $\rho(\boldsymbol{x})$ が, ある物理量の単位体積あたりの量, すなわち密度を表しているとする．このとき, $dv\,\rho$ は, 微少体積要素 dv に含まれる物理量の量を意味するので, それを寄せ集めた

$$\int_V dv\ \rho \tag{2.3}$$

は領域 V に含まれる物理量の総量となる．

また, ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ が, 単位体積あたりに働く力 (〜力密度?) だとすると, $dv\,\boldsymbol{F}$ は微少体積要素 dv に働く力を意味し, $dv\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ は微少体積要素 dv に働く原点まわりのトルク (モーメント) を意味する．

そこで, それらを寄せ集めた

$$\int_V dv\ \boldsymbol{F} \qquad\qquad \int_V dv\ \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F} \tag{2.4}$$

は, 領域 V に働く, 合力と総トルクを意味する．

2.2　微分

2.2.1　勾配：gradient

地図上での, 登山のイメージトレーニングを考える．地図上には等高線 $h(x,y)=$ 定数 が描かれている．「標高」を表す $h(x,y)$ は, 一種のスカラー場である．地図上を, 地点 A から B まで, 経路 C にそって移動したときの高度変化は, (地図上を) 単位距離進んだときの高度変化率を dh/ds として,

$$\Delta h = h(A) - h(B) = \int_{C;A\to B} ds\ \frac{dh}{ds} \tag{2.5}$$

で与えられる．

さて, この高度変化率は, 次のようにも表現できる．地図上を微少変位 $d\boldsymbol{x}$ したときの高度変化は

$$dh = dx\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + dy\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} \tag{2.6}$$

であるが, これは**勾配**演算子

$$\mathrm{grad} = \boldsymbol{e}_x\ \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\ \frac{\partial}{\partial y} \tag{2.7}$$

を導入すると,

$$dh = d\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{grad}\,h \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dh}{ds} = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\cdot\mathrm{grad}\,h \tag{2.8}$$

と表せる．すなわち, Eq.(2.5) は,

$$\Delta h = \int_{C;A\to B} d\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{grad}\,h \tag{2.9}$$

となる．

同様に, 一般次元でも, 「微少変位 $d\boldsymbol{x}$ したときのスカラー場の変化量 (すなわち全微分)」に結び付く量を,

$$d\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{grad}\,\phi := d\phi \tag{2.10}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\cdot\mathrm{grad}\,\phi := \frac{d\phi}{ds} \tag{2.11}$$

で定義し, この grad を勾配演算子という．この grad を $\boldsymbol{\nabla}$ とも書く．

この定義 (2.11) から分かるように, 勾配演算子はスカラー場に作用してベクトル場を作る．また, **特定の座標系によらない形で定義されている**ことに注意.

勾配演算子の具体形は, 座標系を定め, Eq(2.10) の右辺を書き下すことで得られる．3 次元の場合に, デカルト座標, 円筒座標, 極座標での具体形を書き下すと, それぞれ次のようになる：

$$\mathrm{grad} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.12}$$

$$= \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.13}$$

$$= \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2.14}$$

2.2.2 回転：rotation

点 $\boldsymbol{x}$ を含む微少な曲面 dS(そのベクトル面要素は $d\boldsymbol{S}$) をとり, その縁を, $\boldsymbol{n}$ が右ネジの進行方向となるように進む閉曲線を $C = \partial(dS)$ とする.

いま, この閉曲線 C にそってベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の線積分 $\Gamma(C) := \oint_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}$ を考える．もし, $\boldsymbol{A}$ が, あるスカラー場 ϕ の勾配, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ であれば, $\Gamma(C) = \oint_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A} = \phi(\text{終点}) - \phi(\text{始点}) = 0$ となるはずである.

すると, $\Gamma(C)$ は, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を何らかのスカラー場の勾配で表すことの**できなさ具合**を測る量として捉えることができる．この $\Gamma(C)$ は閉曲線 C に結び付いた量として定義されたが, 閉曲線 C 自体がベクトル面要素の「縁」として与えられているので, ベクトル面要素の $d\boldsymbol{S}$ と関連した量として考えることもできる.

そこで, $d\boldsymbol{S}$ と一緒になって $\Gamma(C)$ を作るベクトル場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ を導入して, $d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) := \Gamma(C)$ とする．$\Gamma(C)$ は元々のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と関連しているので, 新しいベクトル場 $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ から作られるはずである．そこで, $\boldsymbol{A}$ に作用して $\boldsymbol{B}$ をつくる演算子, **回転**演算子 rot を導入し, $\boldsymbol{B} =: \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 書くことにする．つまり,

$$d\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A} := \oint_{\partial(dS)} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A} \tag{2.15}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A} := \lim_{dS\to 0}\frac{1}{dS}\oint_{\partial(dS)} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A} \tag{2.16}$$

である.

定義 (2.16) から分かるように, 回転演算子はベクトル場に作用してベクトル場を作る．また, **特定の座標系によらない形で定義されている**.

回転演算子の具体形は, 座標系を定め, Eq(2.15) の右辺を書き下すことで得られる．3 次元の場合に, デカルト座標, 円筒座標, 極座標での具体形を書き下すと, それぞれ

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{2.17}$$

$$= \boldsymbol{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right) \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right\} + \boldsymbol{e}_\theta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right) \\ &\quad + \boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

となる.

完全反対称テンソルを用いると, 「回転」の**デカルト座標での**成分表示は,

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_i = \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\,\partial_j A_k \tag{2.20}$$

と表せる．ここで, $\partial_i = \partial/\partial_i$ である．この表式は, 微分演算子の積を計算する上で有用である．

2.2.3 発散：divergence

点 $\boldsymbol{x}$ を含む微少領域 dV(その体積要素は dv) をとり, それを取り囲む閉曲面を, $S = \partial(dV)$ とする．また, 点 $\boldsymbol{x}$ を含む内部から外部に向かって, 面積要素の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を選ぶことにする．

いま, この閉曲面 S を「横切る」ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の「総流出量」$\sigma(S) := \oint_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{A}$ を考える．

この $\sigma(S)$ は閉曲面 S に結び付いた量として定義されたが, 閉曲面 S 自体が微少領域を取り囲む閉曲面として与えられているので, 微少領域 dV と関連した量として考えることもできる．

そこで, dv と一緒になって $\sigma(S)$ を作るスカラー場 $q(\boldsymbol{x})$ を導入して, $dv\, q(\boldsymbol{x}) := \sigma(S)$ とする．$\sigma(S)$ は元々のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と関連しているので, 新しいスカラー場 q は $\boldsymbol{A}$ から作られるはずである．そこで, $\boldsymbol{A}$ に作用して q をつくる演算子, **発散**演算子 div を導入し, $q =: \mathrm{div}\boldsymbol{A}$ と書くことにする．つまり,

$$dv\ \mathrm{div}\boldsymbol{A} := \oint_{\partial(dV)} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{A} \tag{2.21}$$

$$\iff \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{A} := \lim_{dV\to 0}\frac{1}{dv}\oint_{\partial(dV)} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{A} \tag{2.22}$$

である．

定義 (2.22) から分かるように, 発散演算子はベクトル場に作用してスカラー場を作る．また, **特定の座標系によらない形で定義されている**.

発散演算子の具体形は, 座標系を定め, Eq.(2.21) の右辺を書き下すことで得られる．3 次元の場合に, デカルト座標, 円筒座標, 極座標での具体形を書き下すと, それぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && (2.23)\\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && (2.24)\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} && (2.25)
\end{aligned}$$

2.3 これら微分演算子の積

3 つの微分演算子 grad, rot, div を形式的に組み合わせると, 9 つの演算子

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{grad\ grad} & \mathrm{rot\ grad} & \mathrm{div\ grad} \\
\mathrm{grad\ rot} & \mathrm{rot\ rot} & \mathrm{div\ rot} \\
\mathrm{grad\ div} & \mathrm{rot\ div} & \mathrm{div\ div}
\end{array} \tag{2.26}$$

ができるが, 意味のある (定義されている) ものは, rot grad, div grad, rot rot, div rot, grad div の 5 つである．なお, このうち, rot grad, div rot の 2 つは, 恒等的に 0 となる．

div grad はスカラー場に作用してスカラー場をつくる演算子で, ラプラシアンと呼ばれ, $\triangle := \mathrm{div\ grad}$ と記される．

grad div はベクトル場に作用してベクトル場をつくる演算子である．なお, 演算子 grad と div の積の順序が, ラプラシアンと異なるだけのように思えるが, 数ではないので, 積の順序は本質的であり, $\mathrm{grad\ div} \neq \mathrm{div\ grad}$ であることに注意.

rot rot はその他の演算子によって表現することできる．

2.4 ヘルムホルツの定理

Helmholtz' Theorem

3 次元全空間で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が, 連続かつ無限遠方で十分強く 0 に漸近するとき, $\boldsymbol{A}$ は, あるスカラー場 f とベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を用いて

$$\boldsymbol{A} = -\mathrm{grad}\, f + \mathrm{rot}\, \boldsymbol{V} \tag{2.27}$$

と表せる. また, これらのスカラー場 f とベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は, 付加定数を除き一意に定まる.

f は $\boldsymbol{A}$ の発散部分の情報を, $\boldsymbol{V}$ は回転部分の情報を担い, それぞれ, 縦成分 (longitudinal part), 横成分 (transverse part) と言われる. この Helmholtz の定理から, ベクトル場で記述される電磁場の方程式 (Maxwell 方程式) が, 発散や回転を用いた微分方程式で記述されるのは自然であることが分かる.

2.5 これら微分演算子と積分の関係

2.5.1 基本的な積分定理 〜 「部分積分」の高次元版

Eqs.(2.10), (2.15), (2.21) などの諸演算子の定義から明らかなように, いくつかの積分定理が存在する.

部分積分

$$\int_C d\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{grad}\, \phi = \phi(\text{終点}) - \phi(\text{始点}) \tag{2.28}$$

ストークスの定理

$$\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A} \tag{2.29}$$

ガウスの定理

$$\int_V dv\ \mathrm{div}\boldsymbol{A} = \oint_{\partial V} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A} \tag{2.30}$$

2.5.2 関連した積分定理

ストークスの定理から

$$\int_S d\boldsymbol{S} \times \mathrm{grad}\, \phi = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{r}\ \phi\ , \qquad \int_S d\boldsymbol{S}\ \cdot [\ (\mathrm{grad}\, \phi) \times (\mathrm{grad}\, \psi)\ ] = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{r} \cdot (\phi\ \mathrm{grad}\, \psi) \tag{2.31}$$

ガウスの定理から

$$\int_V dv\ \mathrm{grad}\, \phi = \oint_{\partial V} d\boldsymbol{S}\ \phi\ , \qquad \int_V dv\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \oint_{\partial V} d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} \tag{2.32}$$

グリーンの第 1 恒等式

$$\int_V dv\ \ [\ \phi\ \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, \psi + (\mathrm{grad}\, \phi) \cdot (\mathrm{grad}\, \psi)\ ] = \oint_{\partial V} d\boldsymbol{S} \cdot (\phi\ \mathrm{grad}\, \psi) \tag{2.33}$$

2.6 微分形式とストークスの定理

実は, これらの積分定理は, 外微分形式 (3 次元でのみ定義されている外積や「回転」の一般次元版) によって, 「外微分形式のストークスの定理」

$$\int_{V_n} d\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = \int_{\partial V_{n-1}} \boldsymbol{\alpha}_{n-1} \tag{2.34}$$

という, たった一つの定理に集約される. ここで, α_{n-1} は「$(n-1)$-形式」と呼ばれる完全反対称テンソルである. 演算子 d は「外微分」と呼ばれ, 微分を含む操作によって「$(n-1)$-形式」から「n-形式」をつくる.

部分積分 (2.28) は $n=1$, ストークスの定理 (2.29) は $n=2$ の場合の「外微分形式のストークスの定理」に他ならず, ガウスの定理 (2.30) は $n=3$ の場合の「外微分形式のストークスの定理」を書き換えたものに過ぎない.

3 電磁気学

3.1 マックスウェルの方程式

3.1.1 微視的記述

電磁単位系として, SI(MKSA) 単位系を用いる.

真空中のマックスウェルの方程式

真空中の Maxwell 方程式は, 真空誘電率と真空透磁率を, それぞれ ϵ_0, μ_0 とし, 微視的にみて存在する全電荷と全電流を, それぞれ $\rho_{\rm total}$, $\boldsymbol{J}_{\rm total}$ として,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_{\rm total}}{\epsilon_0} \qquad \text{クーロンの法則} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{磁気単極子の不在} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{ファラデーの法則} \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}_{\rm total} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \text{アンペールの法則 + 変位電流} \tag{3.4}$$

これらによって, 全電荷と全電流から電磁場がどのように誘導されるかが決定される.

ローレンツ力

電磁場が存在しても, それらを検出することができなければ (それらが何かに作用しなければ), 実質的にそれらは存在しないことになる. しかし実際は, 電磁場は荷電粒子に作用し, その運動にを通して検出される.

試験粒子は, 電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ からローレンツ力 $\boldsymbol{f}_{\rm Lorentz}$ を受ける (ローレンツ力以外の力を $\boldsymbol{f}_{\rm else}$ とする) :

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f}_{\rm Lorentz}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{f}_{\rm else}(\boldsymbol{r}) \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{f}_{\rm Lorentz}(\boldsymbol{r}) := q \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \right) \tag{3.6}$$

ここで, m と q は, それぞれ試験粒子の質量と電荷であり, $\boldsymbol{r}$ は, その位置ベクトルである.

以上が, 電磁気学の基本法則である.

電荷保存則

なお, 電荷保存則はマックスウェルの方程式に内包されている (Eqs.(3.1) と (3.4) から導かれる).

$$0 = \frac{\partial \rho_{\mathrm{total}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{total}} \tag{3.7}$$

3.1.2 巨視的記述

原理的な立場では, 電磁現象の記述には, 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ で書かれる Eqs.(3.1)-(3.4) と (3.6) があれば十分である. そして, それらの諸法則を通して電磁場の振る舞いを知るには, 全電荷 ρ_{total} と全電流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{total}}$ の情報が必要となる.

しかし, 現実問題として我々が実際に入手できる情報は, 全電荷や全電流についてではなく, コントロールできる一部にすぎない. 例えば, 電磁石を考える. コイルの中心に鉄芯を入れると, より強い磁場を発生することができるが, これはコイルに流れる電流 (制御可) によって発生した磁場 $\boldsymbol{B}_0$ 以外に, それによって誘起される鉄芯内部の荷電粒子の運動で生じる新たな磁場 $\boldsymbol{B}_1$ が重ね合わされたためであると考えられる.

このとき, 鉄芯内部の個々の荷電粒子の運動を予言することは実質的に不可能であり, 全電流や全電荷についての情報を知ることができず, よって Maxwell 方程式から磁場を微細に求めることができなくなる. しかし我々の日常スケールでの観測量は原子分子のスケールのものではなく, 平均化された量である. 鉄芯内部の個々の荷電粒子の運動は複雑で予測不可能だが, 幸いにも, 平均化された運動は一定していて, よって日常スケールで観測される磁場も一定している. これから, 鉄芯内部の荷電粒子の平均化された運動によって発生する, 未知ではあるが一定した磁場 $\boldsymbol{B}_1$ を,「鉄芯の性質」として押し込められる可能性が出てくる.

具体的には, 次のように進む：全電荷と全電流の内, 制御できる電荷 (実電荷) ρ と電流 (実電流) $\boldsymbol{J}$ を取出し, 制御できない部分は媒質の性質として押し込めることで, 制御できる実電荷と実電流に基づいた巨視的法則をつくる.

そこで, 全電荷と全電流を制御できる部分とそれ以外に分ける.

$$\rho_{\mathrm{total}} = \rho + \rho_{\mathrm{P}} \qquad\qquad \boldsymbol{J}_{\mathrm{total}} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}' \tag{3.8}$$

制御できない電荷分布 ρ_{P} は分極電荷, それが誘導する電場は分極電場 $\boldsymbol{P}$ と呼ばれ,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0} \right) := \frac{\rho_{\mathrm{P}}}{\epsilon_0} \tag{3.9}$$

で定義される. 分極電場はそこに存在する本質的な電磁場 $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ によって誘起された, 制御できない電場成分であって, 媒質の性質であると考える. つまり, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ である.

電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) := \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ を導入すると, Maxwell 方程式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \left(\boldsymbol{J}' - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \right) = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{3.13}$$

と書ける. これまでの手続きで, 制御可能な実電荷を用いた形式になったので, 後は電流についてである.

さて, 実電流は実電荷の移動によって生じるので, 巨視的電荷保存則

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} \tag{3.14}$$

を要請する. すると, Eq.(3.13) の発散から $\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{J}' - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \right) = 0$ が導かれる. これから,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} := \boldsymbol{J}' - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{3.15}$$

なるベクトル場 $\boldsymbol{M}$ が存在しなければならず, これを磁化 (磁気分極) という. 磁化も, 分極電場と同様に, 本質的電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ によって媒質に誘起されたものとし, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ と考える.

そこで, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) := \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$ を導入すると, Maxwell 方程式は巨視的な量 ρ, $\boldsymbol{J}$ によって

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{3.16}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.17}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.18}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{3.19}$$

と表される. 新しい変数 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ が登場したが, それらは媒質の性質を反映した**構成方程式**

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \qquad \left(= \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \right) \tag{3.20}$$
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \qquad \left(= \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) \tag{3.21}$$

によって, 規定される. 以上, Eqs.(3.16)-(3.19), および Eqs.(3.20) と (3.21) が, 巨視的マックスウェル方程式である. なお, **試験粒子の受ける力は, 本質的電磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ からのもの**であり, Eq.(3.6) は変わらない.

電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ がそれほど強くない場合, 経験的に

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \tag{3.22}$$

のような線形関係式が成立することが知られている. (媒質の性質を反映した) 比例係数 ϵ, μ は, それぞれ誘電率, 透磁率とよばれる.

これまでの手続きで得られた処方箋を, 静電場の場合に簡単に言うと, 次のようになる：制御可能な実電荷密度 ρ によって, 電場 $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{D}/\epsilon_0$ が生成される. さらに, この電場に媒質が反応することで新たな電場 $-\boldsymbol{P}/\epsilon_0$ が誘起されるので, それらの線形重ね合わせ $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\epsilon_0 - \boldsymbol{P}/\epsilon_0$ が実際の電場となる. 電場の強さがそれ程強くない場合, 媒質によって誘起された電場 $-\boldsymbol{P}/\epsilon_0$ は, 実電荷によって生成された $\boldsymbol{E}_0$ に比例し, $-\boldsymbol{P}/\epsilon_0 = \gamma \boldsymbol{D}/\epsilon_0$ で与えられるので, 結局, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\epsilon_0 + \gamma\, \boldsymbol{D}/\epsilon_0 = (1+\gamma)\boldsymbol{D}/\epsilon_0$ のように, 実際の電場 $\boldsymbol{E}$ は実電荷から生成される電場 $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{D}/\epsilon_0$ の $1+\gamma$ 倍となる.

Eq.(3.22) のもとで, 巨視的マックスウェルの方程式は, 次のように電場と磁場を分離した形にできる.

$$\epsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \triangle \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \tag{3.23}$$
$$\epsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} - \triangle \boldsymbol{B} = \mu \nabla \times \boldsymbol{J} \tag{3.24}$$

ただし, $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は独立ではなく,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.18}$$

のように, 時間変化を通して結び付いていることに注意.

3.1.3 異なる媒質間の境界層の効果

二つの異なる媒質 (以下, 媒質 1, 媒質 2 とする) が非常に薄い境界層を通して接触している状況を考える. そして, この境界層は巨視的視点からは無限小の厚さとして扱うものとする. すると, この境界層に存在する実電荷, 実電流は, 巨視的視点からは, 無限小の厚さの境界層に存在する面 (実) 電荷 σ, 面 (実) 電流 $\boldsymbol{j}_s$ (明らかに, $\boldsymbol{j}_s \cdot \boldsymbol{n} = 0$) として扱われる. 境界層に直交する, 媒質 1 から媒質 2 に向かう単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし, 諸々のベクトルの, 境界層に沿う成分を, 添字 t で表すことにする.

巨視的マックスウェル方程式 Eqs.(3.16)- (3.19) を境界層をはさんで積分することで, 二つの媒質間の (接続) 境界条件

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \cdot \boldsymbol{n} = 4\pi\,\sigma && (3.25)\\
&\boldsymbol{E}_{2,\,t} - \boldsymbol{E}_{1,\,t} = 0 && (3.26)\\
&(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \cdot \boldsymbol{n} = 0 && (3.27)\\
&\boldsymbol{H}_{2,\,t} - \boldsymbol{H}_{1,\,t} = \boldsymbol{j}_s && (3.28)
\end{aligned}
$$

を得る.

3.2 電磁ポテンシャルによる記述とゲージ変換

マックスウェルの方程式 Eqs.(3.16)-(3.19) の内, Eqs.(3.17) と (3.18) は, 電磁ポテンシャルを導入することにより, 次のように解けてしまう.

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3.29}
$$

$$
(3.18) \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.30}
$$

新たに導入されたスカラーポテンシャル ϕ, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を, 併せて電磁ポテンシャルや 4 元ポテンシャルとよぶ.

ここで注意すべきことは, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の合計 6 成分の量に対して, 1 成分の Eq.(3.17) と, $2(= 3 - 1)$ 成分の Eq.(3.18) の合計 3 成分の方程式を解いたはずなので, 本質的に残っている変数の自由度は $6 - 3 = 3$ 自由度なのにも関わらず, ϕ, $\boldsymbol{A}$ の合計 4 成分の変数を用いて解いている点である. つまり, 物理的状況を記述するのに必要な残り 3 変数に対し, 1 つ余分な変数を付け加えて記述していることになる. 当然, この余分な 1 自由度は物理に影響しない (してはならない). 実際, 電磁ポテンシャル ϕ, $\boldsymbol{A}$ に対して,

$$
\phi \;\to\; \phi' := \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \qquad\qquad \boldsymbol{A} \;\to\; \boldsymbol{A}' := \boldsymbol{A} + \nabla \lambda \tag{3.31}
$$

という変数変換を施しても, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ は ϕ', $\boldsymbol{A}'$ を用いて, 同じ形の

$$
\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}' \qquad\qquad \boldsymbol{E} = -\nabla \phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} \tag{3.32}
$$

によって与えられる. つまり, 電磁ポテンシャルは, 物理に影響することなく, 1 自由度分を自由に選択できる. このような, 物理に影響しない自由度と変換 (3.31) を, ゲージ自由度, およびゲージ変換とよぶ.

さて, 4 成分の電磁ポテンシャルを規定する方程式は, 1 成分の Eq.(3.16) と本質的に 2 成分の Eq.(3.19) の合計 3 本の方程式である. 1 自由度分は定まらないが, これは物理に影響しないゲージ自由度の反映である.

Eq.(3.22) の下で, Eqs.(3.16) と (3.19) は

$$
\begin{aligned}
&-\triangle \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = \frac{\rho}{\epsilon} && (3.33)\\
&\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{A} - \triangle \boldsymbol{A} = \mu\, \boldsymbol{J} - \nabla \left(\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) && (3.34)
\end{aligned}
$$

となる.

後は, 状況に応じて, 電磁ポテンシャルの選択の自由度 (ゲージ自由度) を利用し, Eqs.(3.33) と (3.34) を簡略化する. 以下に, 代表的な 2 つのゲージを挙げる.

クーロン・ゲージ： $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{3.35}$$

$$\mu\epsilon\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\boldsymbol{A} - \triangle\boldsymbol{A} = \mu\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}} \tag{3.36}$$

ここで, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{J}$ の横成分 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}} = 0$ である.

ローレンツ・ゲージ： $\epsilon\mu\,\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$

$$\mu\epsilon\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \triangle\phi = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{3.37}$$

$$\mu\epsilon\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\boldsymbol{A} - \triangle\boldsymbol{A} = \mu\,\boldsymbol{J} \tag{3.38}$$

3.3 定常問題

定常問題, $\partial_t = 0$, を考える. Eq.(3.22) のもとで,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0 \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu\,\boldsymbol{J} \tag{3.40}$$

となる. このように, 定常状態では, 電場と磁場はお互いに独立である.

Eq.(3.39) の第 2 式と Eq.(3.40) の第 1 式を, まず解くことができる：

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{3.41}$$

これらは, 電磁場を電磁ポテンシャルで表した Eqs.(3.29) と (3.30) の, 定常な場合の表式に他ならない.

残された, Eq.(3.39) の第 1 式と Eq.(3.40) の第 2 式は,

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \triangle\boldsymbol{A} = \mu\,\boldsymbol{J} \tag{3.43}$$

これらは当然, Eqs.(3.33) と (3.34) の, 定常な場合の表式である. ゲージ自由度を利用して, 定常なゲージ変換を行ってクーロン・ゲージ $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$ を選ぶことができ,

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{3.44}$$

$$\triangle\boldsymbol{A} = -\mu\,\boldsymbol{J} \tag{3.45}$$

となる. このように, 定常問題は (クーロン・ゲージの下で) ポアッソン方程式を解くことに帰着される.

これらの方程式は線形の非斉次微分方程式なので, それらの一般解は斉次解と非斉次方程式の特解の重ね合わせで表すことができる.

次の微分方程式を満たす解を, ポアッソン方程式の[*2] グリーン関数と言う：

$$\triangle_x G(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{3.46}$$

ここで, Laplacian $\triangle$ に付いた添字 x は, 座標ベクトル $\boldsymbol{x}$ の方に ($\boldsymbol{x}'$ でなく) 作用することを明示している. 微分方程式だけでは方程式の解は定まらず, 境界条件が必要で, その境界条件に応じて, グリーン関数は様々な

[*2] 左辺の演算子に応じて, さまざまなグリーン関数がある. なお, グリーン関数については, かつて本学で教鞭をとっておられた, 今村先生が書かれた「物理とグリーン関数」(岩波書店) がお奨め. また, 副読本として 2 つの雑誌記事, 「知られざるグリーン」(数学セミナー：2003 年 7 月号) や「風車小屋の物理学者——グリーン」(パリティ：2003 年 5 月号) を挙げておく.

ものがある．[*3] 代表的なグリーン関数は,

$$G^{(3)}(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}') = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{3.47}$$

$$G^{(2)}(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}') = +\frac{1}{2\pi}\,\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \tag{3.48}$$

である．ここで, $G^{(3)}$ と $G^{(2)}$ は, それぞれ 3 次元空間と 2 次元空間におけるグリーン関数である．

このグリーン関数を用いて, Eqs.(3.44) と (3.45) を形式的に解くことができる (以下, 3 次元とする).

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi_0(\boldsymbol{x}) - \int d^3x'\; G^{(3)}(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}')\,\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{\epsilon} = \phi_0(\boldsymbol{x}) - \int d^3x'\;\frac{-1}{4\pi\,\epsilon}\,\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{3.49}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x}) - \int d^3x'\; G^{(3)}(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}')\,\big(\mu\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\big) = \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x}) - \int d^3x'\;\frac{-\mu}{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{3.50}$$

ここで ϕ_0, $\boldsymbol{A}_0$ は斉次解を表し, ϕ と $\boldsymbol{A}$ に与えられた境界条件を満足するように定められる．

3.4 非定常問題

3.4.1 電磁誘導

前節で見たように, 電磁場が定常なときは, 電場と磁場はお互いに独立に振る舞う．しかし, Eqs.(3.3) や (3.4) から明らかなように, 非定常な状況にあるときには独立でなくなる．

Eq.(3.3) を理解しやすい便利な形に書き換えてみる．**固定された** (仮想的な) 閉回路 C を境界に持つ曲面 S ($\partial S = C$) で積分すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) + \int_S d\boldsymbol{S}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \oint_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} \\ \to \qquad & \frac{\partial}{\partial t}\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} = -\oint_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{3.51}$$

を得る．左辺は磁束 $\displaystyle\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}$ の時間変化率であり, 右辺は閉回路 C に沿って発生した電位であるので, これは「磁束変化は閉回路に起電力をもたらす」となる．

Eq.(3.4) も同様の式に変形される (定常の場合は, 積分形の Ampere の法則に帰着する)．変位電流の項は, 電荷保存則と矛盾しないために必要である．また, それに比べ, Eq.(3.3) に「変位磁流」の項が存在しないのは, 磁荷が存在しないことに対応している．

注意すべきことは, 電磁場が定常なときでも, 観測者の運動状態によって, 磁場から電場が (逆に, 電場から磁場も) 生じるように見える点である．この事実は, 電場と磁場を別個に扱うよりも, 統一されたある一組の量として扱った方がより良いことを示唆する (丁度, ベクトルの成分 (〜電場・磁場) が座標軸の取り方 (運動状態) で異る値になることに類似している)．実際, 相対論的な (ローレンツ) 共変形式を用いれば, 電場と磁場は, それぞれ $F_{\mu\nu}$ の (時間・空間) 成分, および (空間・空間) 成分として統合される．

上記の事柄は, 次の事実からも分かる：各部が速度 $\boldsymbol{u}(t)$ で運動する (仮想的な) 閉回路 $C(t)$ と, $C(t)$ を境界とする曲面 $S(t)$ を考える．曲面 $S(t)$ を貫く磁束 $\Phi(t) = \displaystyle\int_{S(t)} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}(t)$ と, 微小時間 dt だけ経過したときの, 曲面 $S(t+dt)$ を貫く磁束 $\Phi(t+dt) = \displaystyle\int_{S(t+dt)} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}(t+dt)$ を比較する．異なる時間での比較だけでなく, 移動により異なる位置での比較も含むことに注意すると, $d\Phi(t) := \Phi(t+dt) - \Phi(t)$ として

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\int_{S(t)} d\boldsymbol{S}\cdot\Big(\boldsymbol{\nabla}\times\big[\,\boldsymbol{E}(t) + \boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{B}(t)\,\big]\Big) = -\oint_{C(t)} d\boldsymbol{r}\cdot\big(\boldsymbol{E}(t) + \boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{B}(t)\big) \tag{3.52}$$

[*3] 便利なものは, ϕ や $\boldsymbol{A}$ に与えられた境界条件を満足するものである．

となる．これは, 運動する回路ともに運動する観測者にとっての電場が $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ であるとすれば, Eq.(3.51) と同じ式になる．また, この事実は Lorentz 力の解釈を与える．

3.4.2 電磁波

実電荷と実電流が存在しない場合 $\rho = 0$, $\boldsymbol{J} = 0$ を考える．このとき, 解くべき方程式は次のようになる：

$$\epsilon\mu\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \triangle\boldsymbol{E} = 0 \qquad \epsilon\mu\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} - \triangle\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.54}$$

これらは線形方程式なので, フーリエ変換によって容易に解くことができる．つまり, 平面波解を求めた後, それらの線形重ね合わせによって一般解が構成できる．

まず, 電場 $\boldsymbol{E}$ の平面波解として ($\omega > 0$ として一般性を失わない), 次の形を仮定する：

$$\boldsymbol{E}(t,\,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}\,\exp\big[\,i\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega\,t)\,\big] \tag{3.55}$$

媒質中の光速を $c := 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ として, $\omega = c\,|\boldsymbol{k}|$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0$ であれば, これは実際に解となる．このとき, $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B}(t,\,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mathcal{B}}\,\exp\big[\,i\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega\,t)\,\big] \tag{3.56}$$

と表されるが, ここで, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ は次で与えられる：

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{3.57}$$

電磁場の振動方向 ($\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$) と波の進行方向 ($\boldsymbol{k}$) が互いに直交することから, **電磁波は横波である**ことが分かる．

$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0$ を満たす独立なベクトルは 2 種類 ($i = 1, 2$) ある (電磁波の自由度は各波数ごとに **2 自由度**ずつある) ことに注意すると,

$$\boldsymbol{E}^{(i)}_{\boldsymbol{k}}(t,\,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}_{\boldsymbol{k}}\,\exp\big[\,i\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega\,t)\,\big] \qquad \Big(\,\omega = c\,|\boldsymbol{k}|\;,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)} = 0\;,\quad \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)} = 0\,\Big) \tag{3.58}$$

$$\boldsymbol{B}^{(i)}_{\boldsymbol{k}}(t,\,\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{E}^{(i)}_{\boldsymbol{k}}(t,\,\boldsymbol{x}) \tag{3.59}$$

が基本解となる．ここで, $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}$ は波数ベクトル毎に独立なので, それを明示するために添字 $\boldsymbol{k}$ を付けた．

一般解は, 次のように与えられる：

$$\boldsymbol{E}(t,\,\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1,2}\int d\boldsymbol{k}\;\big(\boldsymbol{E}^{(i)}_{\boldsymbol{k}}(t,\,\boldsymbol{x}) + \text{c.c.}\big) = \sum_{i=1,2}\int d\boldsymbol{k}\;\Big(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}_{\boldsymbol{k}}\,e^{i\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - c\,|\boldsymbol{k}|\,t)} + \text{c.c.}\Big) \tag{3.60}$$

$$\boldsymbol{B}(t,\,\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1,2}\int d\boldsymbol{k}\;\frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\Big(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}_{\boldsymbol{k}}\,e^{i\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - c\,|\boldsymbol{k}|\,t)} + \text{c.c.}\Big) \tag{3.61}$$

3.4.3 偏光

前節で明らかになったように, 電磁波の各平面波成分は, その進行方向を表す波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ と, 場の振動方向を特徴付ける**偏光**ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}_{\boldsymbol{k}}$ ($i = 1, 2$) によって表される．

電場の振動方向は**偏光面**と呼ばれる．一般に, 偏光面は時間／空間変化する．例えば, z 軸の正方向に進行する単色平面波を考え, 偏光ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(1)}_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)}_{\boldsymbol{k}}$ が, それぞれ x, y 軸方向になるように座標系を取ると,

$$\boldsymbol{E}(t,\,\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1,2}\Big(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}\,e^{i\,k(z-c\,t)} + \text{c.c.}\Big) = (\mathcal{E}_x\,\boldsymbol{e}_x + \mathcal{E}_y\,\boldsymbol{e}_y)\,e^{i\,k(z-c\,t)} + \text{c.c.} \tag{3.62}$$

と書き表せる．この電磁波を原点で観測すると, その電場の振動面は以下のように, 一般に時間変化する：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(t,\,\boldsymbol{x}=0) &= \boldsymbol{e}_x\,\Re\left(\mathcal{E}_x\,e^{-i\,\omega\,t}\right) + \boldsymbol{e}_y\,\Re\left(\mathcal{E}_y\,e^{-i\,\omega\,t}\right)\\ &= \boldsymbol{e}_x\,|\mathcal{E}_x|\,\cos(\omega\,t-\alpha_x) + \boldsymbol{e}_y\,|\mathcal{E}_y|\,\cos(\omega\,t-\alpha_y)\end{aligned} \tag{3.63}$$

ここで, $\omega = c\,k$ であり, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ の偏角を α_x , α_y とした．$\theta := (\alpha_x+\alpha_y)/2$, $\delta := \alpha_x-\alpha_y$ を用いると,

$$E_x(t,\,\boldsymbol{x}=0) = |\mathcal{E}_x|\,\cos(\omega\,t-\theta-\delta/2) \qquad E_y(t,\,\boldsymbol{x}=0) = |\mathcal{E}_y|\,\cos(\omega\,t-\theta+\delta/2) \tag{3.64}$$

となるので, 一般に, $\boldsymbol{E}(t,\,\boldsymbol{x}=0)$ は波の進行方向と直交する平面内で次のような楕円を描く：

$$\sin^2\delta = \left(\frac{E_x(t,\,\boldsymbol{x}=0)}{\mathcal{E}_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t,\,\boldsymbol{x}=0)}{\mathcal{E}_y}\right)^2 - 2\,\frac{E_x(t,\,\boldsymbol{x}=0)}{\mathcal{E}_x}\,\frac{E_y(t,\,\boldsymbol{x}=0)}{\mathcal{E}_y}\,\cos\delta \tag{3.65}$$

代表的な状況を考えると,

直線偏光： $\mathcal{E}_x = 0$, または $\mathcal{E}_y = 0$, または $\delta = 0,\,\pi$

このとき, 電場の振動面 (偏光面) は時間変化せず, 一定の直線となる．

円偏光： $|\mathcal{E}_x| = |\mathcal{E}_y|$ かつ $\delta = \pm\pi/2$

このとき, 電場の振動面 (偏光面) は, 半径 $|\boldsymbol{E}_x|$ の円周上を角速度 ω で動く．電磁波の進行方向を向いたとき ($\omega > 0$ に注意), $\delta = +\pi/2$ は左旋回, $\delta = -\pi/2$ は右旋回となる．

3.5 電磁放射・散乱

3.5.1 遅延ポテンシャル

3.5.2 双極子放射

3.5.3 散乱

3.5.4 輻射減衰

3.6 ローレンツ変換

4 Fourier, Laplace 変換

4.1 積分変換

要素還元 —¿ Fourier Laplace 変換、統合 —¿ Fourier Laplace 逆変換

4.1.1 Fourier 変換

4.1.2 Laplace 変換

5 Fourier, Laplace 変換の応用