課題１．（絶対値補間条件で特徴づけられる多項式関数）

多項式補間で学んだように相異なる標本点 $x_0,\ldots,x_n$ についてデータ点 $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$ を与えたときに

$$p(x_i)=y_i,\qquad i=0,1,\ldots,n$$

を満たす高々 n 次の多項式関数は一意的に定まることは知られている．$n=0,1,2$ の場合を考えてみるとわかりやすいと思う．

少し方向性は変わるが，関数値の絶対値の補間するという問題を考えることが出来るというか，未解決な問題のままなので少しでもこの問題が前に進むことを期待して，紹介したい．

簡単のために区間 $[-1,1]$ で考える．n を正の整数として，n 次多項式関数 $p(x)$ は開区間 $(-1,1)$ で相異なる n 個の零点 $a_1,\ldots,a_n$ $(-1<a_1<\cdots<a_n<1)$ をもつとする．便宜上，$a_0=-1, a_{n+1}=1$ とおく．少し考えてみると，$[-1,1]$ の各部分区間 $[a_i,a_{i+1}], i=0,\ldots,n$ において $|p(x)|$ は x のある 1 点で最大値をとることがわかる．そのときの x の値を α_i，最大値を β_i とする．

以上の準備から，以下の問題を考える．

問題． n 次多項式関数 $q(x)$ が $(-1,1)$ で相異なる n 個の零点をもつとする．このとき，$\alpha_i,\beta_i,i=0,\ldots,n$ は上に述べた値とすると，

$$|q(\alpha_i)|=\beta_i\qquad i=0,\ldots,n$$

が成り立つのであれば，$q(x)=p(x)$ または $q(x)=-p(x)$ であると言えるか．

- $n=1$ の場合は，問題が成立することは容易に確かめることは出来る．

- $n=2$ の場合も問題が成立することは確かめたのであるが，そのメモを紛失してしまっているので，$n=2$ から確かめる必要があると思う．

- あとは $n=3$ の場合を確かめるか，具体的な $p(x)$ について問題が成立するかどうかを調べることが必要かと思う．

- $p(x)$ が第 1 種チェビシェフ多項式関数であるときは，任意の次数で問題が成立することが，1971 年に発表された論文に書かれている．実はこの結果を一般的に考えるとどうなるかを考えて，今回の問題に至っている．

2019. 5. 12