課題２．（モーグルの問題）

多項式補間で学んだように相異なる標本点 $x_0, \ldots, x_n$ についてデータ点 $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ を与えたときに

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

を満たす高々 n 次の多項式関数は一意的に定まることは知られている．$n = 0, 1, 2$ の場合を考えてみるとわかりやすいと思う．

モーグル競技をイメージして，多項式補間に関わる未解決な問題を紹介したい．

簡単のために区間 $[-1, 1]$ で考える．n を正の整数として，$a_0 = -1$ $a_1, \ldots, a_{n-1}$ $(a_1 < \cdots < a_{n-1})$ は開区間 $(-1, 1)$ の任意の標本点とする（n は 2 以上であるとき）．このとき，$n + 1$ 個のデータ点

$$(a_0 = -1, 1), (a_1, (-1)^1), (a_2, (-1)^2), \ldots, (a_n = 1, (-1)^n)$$

を通る高々 n 次の補間多項式を $p(x)$ とする．また，同じ $n + 1$ 個のデータ点を節点とする折れ線関数（両端以外の各データ点で折れ曲がる折れ線のことです）を $\ell(x)$ とする．このとき，

$$d(p, \ell) := \max_{x \in [-1,1]} |p(x) - \ell(x)|$$

とおく．

以上の準備から，以下の問題を考える．

問題． 正の整数 n が与えられているとする．このとき，$d(p, \ell)$ が最小となるような標本点 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ を求めよ．

• $n = 1$ の場合は，両端点のみであるので，$d(p, \ell) = 0$ である．

• $n = 2, 3, 4$ と実際に調べて，$d(p, \ell)$ が最小となる標本点を求めて，一般の場合の予想が出来ればと思っている．

• この問題は，高校での出前授業のネタを考える中で生まれた問題です．予想としては，第 1 種チェビシェフ多項式の偏差点と関係がないかと思っています．

2019. 5. 16