補間多項式 (第 12 話)

2.5 多項式関数以外でラグランジュ補間を考える話

第 1 章の定理 1.2，定理 1.3 をもう一度示しておくと

定理 1.2 $n+1$ 個の相異なるデータ点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ (ただし $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ は相異なる) において $y_i = p_n(x_i)$ $(0 \le i \le n)$ をみたす高々 n 次の補間多項式 p_n は存在し，ただ 1 つである．

定理 1.3 関数 $f(x)$ に対して，相異なる $n+1$ 個の標本点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ が与えられているとする．このとき，高々 n 次の多項式 p_n として $f(x_i) = p_n(x_i)$ $(0 \le i \le n)$ をみたす補間多項式 p_n は存在し，ただ一つである．

である．どちらも補間多項式が一意的に存在するという定理であった．この結果を多項式関数の代わりに関数系 $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ （以下簡単に関数系 $u_0, u_1, \ldots, u_n$ と書くことにする）で考えようとしたときに，$u_0, u_1, \ldots, u_n$ がどのような条件を満たせば，定理 1.2 や定理 1.3 と同様の結果が成立するであろうかということを考えてみたい．定理 1.2 と定理 1.3 は同値な定理なので，定理 1.2 に合わせて次の問題を考える．

問題. 関数系 $u_0, u_1, \ldots, u_n$ が与えられているとする．$n+1$ 個の相異なるデータ点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ (ただし $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ は相異なる) について，どのような条件を満たせば

$$c_0 u_0(x_k) + c_1 u_1(x_k) + \cdots + c_n u_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

となる $c_0, c_1, \ldots, c_n$ が一意的に存在するだろうか.

多項式補間の場合の命題 1.1 を参考にすると，任意の $c_0, c_1, \ldots, c_n$，$(c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0)$ について，$u_0, u_1, \ldots, u_n$ の線形結合 $c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x), x \in I$($I$ は定義されている区間) を考えたとき，

$$c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0 \text{ となる点 } x \text{ の個数が高々 } n \text{ 個である} \qquad (*)$$

ということが必要条件であることがわかる．なぜならば，$(*)$ を否定して仮に相異なる $n+1$ 個の点 $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ において

$$c_0 u_0(x_i) + c_1 u_1(x_i) + \cdots + c_n u_n(x_i) = 0,\ c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0$$

であるとする．このとき，各 $u_i, i = 0, 1, \ldots, n$ の係数が 0 である線形結合を考えると

$$0 \cdot u_0(x_i) + 0 \cdot u_1(x_i) + \cdots + 0 \cdot u_n(x_i) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n$$

であるので，$n+1$ 個の相異なるデータ点 $(x_0, 0), (x_1, 0), \cdots, (x_n, 0)$ について

$$c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0$$

となる $u_0, u_1, \ldots, u_n$ の線形結合は 2 個以上あることになる．

逆に $(*)$ は十分条件になるだろうか．つまり，任意の $c_0, c_1, \ldots, c_n$，$(c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0)$ について，$c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0, x \in I$ となる点 x の個数が高々 n 個であるなら

ば，任意の $n+1$ 個の相異なるデータ点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ (ただし $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ は相異なる) について，

$$c_0u_0(x_k)+c_1u_1(x_k)+\cdots+c_nu_n(x_k)=y_k,\quad k=0,1,\ldots,n$$

となる $c_0,c_1,\ldots,c_n$ が一意的に存在することが言えるだろうか.

まず，任意に与えられた相異なる $x_0,x_1,\ldots,x_n$ に対して，データ点 $(x_0,0),(x_1,0),\cdots,(x_n,0)$ については成立する．実際に

$$0\cdot u_0(x_i)+0\cdot u_1(x_i)+\cdots+0\cdot u_n(x_i)=0,\quad i=0,1,\ldots,n$$

が成り立ち，任意の $c_0,c_1,\ldots,c_n(c_0^2+c_1^2+\cdots+c_n^2\neq 0$ については

$$c_0u_0(x_i)+c_1u_1(x_i)+\cdots+c_nu_n(x_i)=0,\quad i=0,1,\ldots,n$$

は条件から成立しないからである．実はこの結果から十分条件にもなっていることがわかる．本質を損なうことなく $n=2$ の場合で説明する．便宜上，$a_{ij}=u_i(x_j),\ i,j=0,1,2$ と表すことにする．上の議論でわかったことは，c_0,c_1,c_2 に関する連立１次方程式

$$\begin{aligned}a_{00}c_0+a_{10}c_1+a_{20}c_2 &= 0\\ a_{01}c_0+a_{11}c_1+a_{21}c_2 &= 0\\ a_{02}c_0+a_{12}c_1+a_{22}c_2 &= 0\end{aligned}$$

の解が $c_0=c_1=c_2=0$ のみということである．この結果を $(**)$ で表すことにする．連立１次方程式を解く過程から眺めてみる．連立１次方程式を解くときには，１つの式に他の式の定数倍したものを加える操作を行って未知数を少なくしていくことが基本である（掃き出し法）．条件から c_0 の係数である $a_{00},a_{01}.a_{02}$ のうちいずれかは 0 でないことはわかる．そうでないと，$u_0(x_0)=u_1(x_0)=u_2(x_0)=0$ となり，$(*)$ に反するからである．式の順を入れ替えることで $a_{00}\neq 0$ であるとする．第１式を a_{00} で割ると，$c_0+a'_{10}c_1+a'_{20}c_2=0$ となる．この式の定数倍（第２式については $-a_{01}$ 倍，第３式については $-a_{02}$ 倍）したものを第２式，第３式に加えると

$$\begin{aligned}c_0+a'_{10}c_1+a'_{20}c_2 &= 0\\ a'_{11}c_1+a'_{21}c_2 &= 0\\ a'_{12}c_1+a'_{22}c_2 &= 0\end{aligned}$$

となる．このとき，c_1 の係数 a'_{11},a'_{12} のいずれかは 0 ではないこともわかる．というのは，仮に　$a'_{11}=a'_{12}=0$ であるとすると

$$\begin{aligned}c_0+a'_{10}c_1+a'_{20}c_2 &= 0\\ a'_{21}c_2 &= 0\\ a'_{22}c_2 &= 0\end{aligned}$$

となり，この連立１次方程式の解として $c_0=c_1=c_2=0$ 以外の解が存在するので $(**)$ に反するからである．よって，a'_{11},a'_{12} のいずれかは 0 ではない．c_0 の係数について行った同じような操作をすると

$$\begin{aligned}c_0\qquad +a''_{20}c_2 &= 0\\ c_1+a''_{21}c_2 &= 0\\ a''_{22}c_2 &= 0\end{aligned}$$

となる．ここまでくると，$a''_{22} \neq 0$ でなければならないことは容易にわかると思う．よって，第３式を a''_{22} で割って，この式の定数倍（第１式については $-a''_{20}$ 倍，第２式については $-a''_{21}$ 倍）したものを第１式，第２式に加えると

$$\begin{array}{rcl} c_0 \qquad & = & 0 \\ c_1 \quad & = & 0 \\ c_2 & = & 0 \end{array}$$

となり，解が $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ のみであることがわかる．ここで，右辺はすべて 0 であったので，注目はしなかったが，0 でない値が右辺にある場合

$$\begin{array}{rcl} a_{00}c_0 + a_{10}c_1 + a_{20}c_2 & = & y_0 \\ a_{01}c_0 + a_{11}c_1 + a_{21}c_2 & = & y_1 \\ a_{02}c_0 + a_{12}c_1 + a_{22}c_2 & = & y_2 \end{array}$$

でも同じ式の変形に合わせて変化するだけであり，

$$\begin{array}{rcl} c_0 \qquad & = & y'_0 \\ c_1 \quad & = & y'_1 \\ c_2 & = & y'_2 \end{array}$$

というように一意的な解が得られる．この説明は $n = 2$ に限らないことを考えると逆も成立することがわかる．定理として書いておこう．

定理 2.11 関数系 $u_0, u_1, \ldots, u_n$ が与えられているとする．$n+1$ 個の相異なるデータ点 (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ (ただし $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ は相異なる) について，

$$c_0u_0(x_k) + c_1u_1(x_k) + \cdots + c_nu_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

となる $c_0, c_1, \ldots, c_n$ が一意的に存在することの必要十分条件は任意の $c_0, c_1, \ldots, c_n$，$(c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0)$ について，$c_0u_0(x) + c_1u_1(x) + \cdots + c_nu_n(x) = 0, x \in I$ となる点 x の個数が高々 n 個であることである．

以上の議論から，関数系 $u_0, u_1, \ldots, u_n$ が $(*)$ の条件を満たせば，ラグランジュ補間の議論ができるのである．$(*)$ の条件は任意に与えられた相異なる $x_0, x_1, \ldots, x_n$ に対して，$n+1$ 次の行列式

$$\begin{vmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_0(x_1) & u_1(x_1) & \cdots & u_n(x_1) \\ & \cdots & \cdots & \\ u_0(x_n) & u_1(x_n) & \cdots & u_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

と同値であることは，線形代数を学んだ方ならばわかってもらえると思う．ここではこの条件は知識とした書いている．$(*)$ を満たす関数系を定義しておく．

定義 2.4 区間 I を定義域とする関数系 $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ が任意の $c_0, c_1, \ldots, c_n$，$(c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0)$ について，$c_0u_0(x) + c_1u_1(x) + \cdots + c_nu_n(x) = 0, x \in I$ となる点 x の個数が高々 n 個であるとき，**ハールの条件**を満たすといい，ハールの条件を見たす関数系を **ハール系**または**チェビシェフ系** という．

注意．上に述べたように，関数系 $u_0, u_1, \ldots, u_n$ がハール系であることは，任意に与えられた $n+1$ 個の相異なる I の点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ に対して，$n+1$ 次の行列式

$$\begin{vmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_0(x_1) & u_1(x_1) & \cdots & u_n(x_1) \\ & \cdots & \cdots & \\ u_0(x_n) & u_1(x_n) & \cdots & u_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

によって，定義することも出来る．ハール系とチェビシェフ系の用語については，明確に決まっていないのが現実であるが，関数系 $u_0, u_1, \ldots, u_n$ の各関数 $u_i, i = 0, 1, \ldots, n$ が I で連続であるときにチェビシェフ系という呼び方をよくする．関数系が連続とは限らない関数で考えることも重要であるが，この補間多項式の話では連続関数を対象に考えて行きたいので，今後は「チェビシェフ系」の呼び方をする．Cheney の本（*Introduction to Approximation Theory*, Chelsea Publishing, New York, 1980）によると，チェビシェフ系の考え方は，de La Valée Poussin [1911] や Haar[1918] の論文に書かれている．今から約 100 年前の話である．

以上の話から多項式関数系 $1, x, \ldots, x^n$ はチェビシェフ系の例となる，というか，チェビシェフ系は多項式関数系をプロトタイプとする関数系と考えられる．チェビシェフ系を定義したのはいいが，多項式関係以外にどのような関数系がチェビシェフ系になるのかということは気になるところである．いくつかの例を挙げてみる．

例 2.1 I を $\mathbf{R}$ の区間とし，$a_0, a_1, \ldots, a_n$ を I に属さない相異なる $n+1$ 個の実数とする．このとき，関数系 $\dfrac{1}{x-a_0}, \dfrac{1}{x-a_1}, \ldots, \dfrac{1}{x-a_n}$ は，I でチェビシェフ系である．

説明．任意の $c_0, c_1, \ldots, c_n$，$(c_0^2+c_1^2+\cdots+c_n^2 \neq 0)$ について，$p(x) = \dfrac{c_0}{x-a_0}+\dfrac{c_1}{x-a_1}+\cdots+\dfrac{c_n}{x-a_n}$ を考える．$p(x)$ を通分してまとめると，$p(x) = \dfrac{\text{高々}\, n\, \text{次の多項式関数}\, q(x)}{(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n)}$ と表される．分母は 0 になることはない．また，$q(x)$ は恒等的に 0 ということにはならない．仮に $q(x) \equiv 0$ であったとすると，ある $\dfrac{1}{x-a_i}$，便宜上，$\dfrac{1}{x-a_0}$ とすると，$\dfrac{1}{x-a_0}$ が

$$\frac{1}{x-a_0} = \frac{d_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{d_n}{x-a_n}, \quad x \in \mathbf{R}$$

と $\dfrac{1}{x-a_1}, \ldots, \dfrac{1}{x-a_n}$ の線形結合で表されることになる．このとき，x を $x > x_0$ を保ちながら x を x_0 に限りなく近づけていく，つまり $x \to x_0 + 0$ とすると，左辺は $+\infty$ に発散し，右辺は有限の値に収束することになり，矛盾が生じる．よって，$q(x)$ は 0 でない高々 n 次の多項式関数なので，$q(x) = 0$ となる x の個数は高々 n 個であることがわかる．

例 2.2 $e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}(\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n)$ は，$(-\infty, \infty)$ でチェビシェフ系である．

説明．$n = 0$ のときは明らかに成立する．
$n = k$ のとき，$e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}$ が $(-\infty, \infty)$ でチェビシェフ系であると仮定する．
$n = k+1$ のとき，$e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_{k+1} x}$ を考える．任意の $c_0, c_1, \ldots, c_n$，$(c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0)$ について，

$$c_0 e^{\lambda_0 x} + c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} = 0$$

を満たす x の個数が $k+1$ 個以下であればよい．

$$e^{\lambda_0 x}(c_0 + c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_0)x} + \cdots + c_{k+1} e^{(\lambda_{k+1}-\lambda_0)x}) = 0$$

より

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_0)x} + \cdots + c_{k+1} e^{(\lambda_{k+1}-\lambda_0)x}$$

とおくと，

$$f'(x) = c_1(\lambda_1-\lambda_0)e^{(\lambda_1-\lambda_0)x} + \cdots + c_{k+1}(\lambda_{k+1}-\lambda_0)e^{(\lambda_{k+1}-\lambda_0)x}$$

である．

(i) $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k+1} = 0$ のとき，$f(x) = c_0 \neq 0$ より，$c_0 e^{\lambda_0 x} = 0$ となる x は存在しない．よって，チェビシェフ系の条件を満たす．

(ii) (i) 以外のとき，$f'(x)$ は $e^{(\lambda_1-\lambda_0)x}, e^{(\lambda_2-\lambda_0)x}, \ldots, e^{(\lambda_{k+1}-\lambda_0)x}$ の自明でない線形結合であり，$f'(x) = 0$ となる x は帰納法の仮定より高々 k 個である．これより，$f(x) = 0$ となる x の個数が高々 $k+1$ 個であることがわかる．よって，

$$c_0 e^{\lambda_0 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} = 0$$

を満たす x の個数は高々 $k+1$ 個である．以上より，$e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}(\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n)$ はチェビシェフ系である．

例 2.3 $x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}(\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n)$ は，$(0, \infty)$ でチェビシェフ系である．

説明． $x^{\lambda_i} = e^{(\lambda_i \log x)}, i = 0, 1, \ldots, n$ より，$t = \log x$ とおくと ($x \in (0, \infty)$ の範囲では相異なる x_1, x_2 について $\log x_1 \neq \log x_2$ が成り立つことに注意する)，t の範囲は実数全体となる．任意の $c_0, c_1, \ldots, c_n$，$(c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0)$ について，

$$p(x) = c_0 x^{\lambda_0} + c_1 x^{\lambda_1} + \cdots + c_n x^{\lambda_n} = 0$$

は，以下のように表される．

$$c_0 e^{\lambda_0 t} + c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} = 0, t \in (-\infty, \infty)$$

よって，例 2.2 より，$p(x)$ の零点の個数は高々 n 個である．したがって，$x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}(\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n)$ はチェビシェフ系である．

例 2.4 $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx,$ は $[0, 2\pi)$ でチェビシェフ系である．

説明． 任意の $c_0, c_1, \ldots, c_n$，$(c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0)$ について，

$$p(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cdots + c_{2n-1} \cos nx + c_{2n} \sin nx = 0$$

を満たす x が高々 $2n$ 個であればよい．オイラーの関係式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (i は虚数単位) から

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

であるので，

$$c_0 + c_1\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) + c_2\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) + \cdots + c_{2n-1}\left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) + c_{2n}\left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right) = 0$$

となる．ここで，$e^{ix}=t\neq 0$ とおくと ($x\in[0,2\pi)$ の範囲では相異なる x_1,x_2 について $e^{ix_1}\neq e^{ix_2}$ が成り立つことに注意する）

$$c_0+\frac{c_1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{c_2}{2i}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\cdots+\frac{c_{2n-1}}{2}\left(t^n+\frac{1}{t^n}\right)+\frac{c_{2n}}{2i}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)=0$$

となる．両辺 t^n 倍し，整理すると

$$\frac{c_{2n-1}-ic_{2n}}{2}t^{2n}+\frac{c_{2n-3}-ic_{2n-2}}{2}t^{2n-1}+\cdots+c_0t^n+\cdots+\frac{c_{2n-3}+ic_{2n-2}}{2}t+\frac{c_{2n-1}+ic_{2n}}{2}=0$$

となる．ここで，$\alpha_k=\dfrac{c_{2k-1}-ic_{2k}}{2},\beta_k=\dfrac{c_{2k-1}+ic_{2k}}{2},k=1,2,\ldots,n$ とおくと，$c_k,k=0,\ldots,2n$ は実数であり，$c_0^2+c_1^2+\cdots+c_{2n}^2\neq 0$ であるので，$\alpha_0,\alpha_k,\beta_k,k=1,\ldots,n$ の中で 0 でないものが存在する．

$$\alpha_nt^{2n}+\alpha_{n-1}t^{2n-1}+\cdots+\alpha_1t^{n+1}+c_0t^n+\beta_1t^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}t+\beta_n=0 \qquad (***)$$

を考えると，代数学の基本定理（複素数係数の n 次方程式の解は複素数の範囲で重解の重複度も数えて，n 個存在する）より $(***)$ の解は重解の重複度も数えて，高々$2n$ 個である．さらに，$x\in[0,2\pi)$ の範囲では相異なる x_1,x_2 について $e^{ix_1}\neq e^{ix_2}$ であったので，$p(x)=0$ を満たす x の個数は高々 $2n$ 個である．よって，$1,\cos x,\sin x,\ldots,\cos nx,\sin nx$ は $[0,2\pi)$ でチェビシェフ系である．

上に挙げた例からわかるように私たちに馴染みのある関数系はチェビシェフ系であり，それらの関数系ではラグランジュ補間の議論をすることが出来るのである．となると，チェビシェフ系の中でどの関数系で近似を考えるのがより適切であるのかという問題も浮かび上がってくる．この問いに関しては私も明確に答えることは出来ず，わかっていない．第 3 章で補間多項式の近似特性について書く予定であるので，そこで現在わかっていることに触れてみたい．

最後にチェビシェフ系に関する研究課題になりうる課題を示しておく．

課題 2.2 (1) チェビシェフ系となる関数系の例をいくつか挙げたが，例で挙げた関数系以外でチェビシェフ系となる関数系を探してみよう．今回の例は専門書に書いてあるものを紹介した．これ以外となると，私自身も思いつかないのが現状である．

(2) 区間 $\mathbf{R}$(もしくは $\mathbf{R}$ から有限個の点を除いた集合) 上の実数値連続関数 $\varphi(x)$ として，次の性質をもつ関数 $\varphi(x)$ を求めよ．出来れば全て求めよ：

n を任意に与えられた正の整数とする．任意の $n+1$ 個の相異なる実数 $v_0,v_1,\ldots,v_n$ について出来る関数系 $\varphi(x-v_0),\varphi(x-v_1),\ldots,\varphi(x-v_n)$ がある区間 I でチェビシェフ系になっている．

例えば，$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ は求める関数の 1 つの例となる．他にもわかるとラグランジュ補間を行うときに平行移動によって出来る関数系を用意すれば良いので，近似特性はともかく，非常に取り扱いやすい関数系となる．この問題は

W. Cheney and W. Light, *A Course in Approximation Theory*, Brooks /Cole Publishing Company, New York, 2000

の p.76 に Research Problems の一つとして掲載されている．部分的な解答を得ることから始めてはどうだろうか．

(第 12 話はここまで)