リーマン面に関する length multiplicity の分布

橋本康史（九州大学）
e-mail: hasimoto@math.kyushu-u.ac.jp

$\mathbb{H}$ を複素上半平面，Γ を $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ の体積が有限になるような $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群とする．そして，$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類の集合，$N(\gamma)$ を $\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$ の固有値の大きい方の二乗とし，

$$\mathrm{Norm}(\Gamma) := \{N(\gamma) \mid \gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)\},$$
$$m(N) := \#\{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \mid N(\gamma) = N\}$$

とおく．すると，セルバーグ跡公式やセルバーグゼータ関数を使って，次のような漸近公式（素元定理）が得られる．

$$\sum_{\substack{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ N(\gamma)<x}} 1 = \sum_{\substack{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)\\ N<x}} m(N) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{as} \quad \to \infty.$$

しかしながら，各 $m(N)$ に関しては，現在のところ $\{m(N)\}_{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)}$ が有界でない（Randol,1980）こと以外はよくわかっていない．本講演では，このような $m(N)$ の N に関する増大度の評価をするとともに，$m(N)$ の平均的な挙動や増大度の一様性をみるために，

$$\pi_\Gamma^{(k)}(x) := \sum_{\substack{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)\\ N<x}} m(N)^k$$

の $x \to \infty$ に関する増大度を調べたので，その結果を紹介する．まず,（co-compact とは限らない）一般的な Γ に対しては次のような結果を得た．

定理 1. Γ を $\mathrm{vol}(X_\Gamma) < \infty$ なる $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して次が成り立つ．

$$m(N) \ll N^{3/4} \quad \text{as} \quad N \to \infty,$$
$$\pi_\Gamma^{(2)}(x) \ll x^{5/3+\epsilon} \quad \text{as} \quad x \to \infty.$$

Γ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群の場合，$m(N)$ が原始的な不定値二元二次形式の類数を使って記述されるので，類数分布に関する既知の事実を利用すると次のような結果を得る．

定理 2. Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$N^{1/2-\epsilon} \ll m(N) \ll N^{1/2}\log N \quad \text{as} \quad N \to \infty$$

が成り立つ．また，$k \geq 2$ に対して，

$$\pi_\Gamma^{(k)}(x) \sim c_\Gamma^{(k)} \mathrm{li}_k(x^{\frac{k+1}{2}}) := c_\Gamma^{(k)} \int_2^{x^{\frac{k+1}{2}}} \frac{dt}{(\log t)^k} \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

をみたすような定数 $c_\Gamma^{(k)} > 0$ が存在する．