Determination of the maximum cardinality of isosceles sets in 4-dimensional Euclidean space

城戸　浩章 (Hiroaki Kido)
九州大学大学院数理学研究院
(Faculty of Mathematics, Kyushu University)

1　Introduction

$\mathbb{R}^k$ を k 次元ユークリッド空間とする。
$x, y \in \mathbb{R}^k$ を $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k), y = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ とするとき、x と y の距離を $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2}$ で定める。

Definition 1.1. 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^k$ に対して、

$$A(X) = \{d(x, y) | x, y \in X, x \neq y\}$$

とおく。このとき、$|A(X)| = s$ であるならば、X を $\mathbb{R}^k$ における s-distance set と呼ぶ。
　また、2 つの s-distance set が互いに相似である場合は同型であるということにする。

　2-distance set の点の個数の最大値は、$\mathbb{R}^1$、$\mathbb{R}^2$ (Kelly [11])、$\mathbb{R}^3$ (Croft [5]) の場合に知られていた。さらに、$k \leq 8$ に対する $\mathbb{R}^k$ の場合は Lisoněk [17] によって与えられ、次のページの Table 1 のような結果が得られている。(坂内-坂内 [1] より抜粋)
　また、$|X| \geq k + 2$ であるならば、$\mathbb{R}^k$ における 2-distance set となる X は有限個であることが Einhorn-Schoenberg [6] により示された。2-distance set の 2 つの距離の比については、Larman-Logers-Seidel [16] により、$|X| > 2k + 3$ であるならば、$\mathbb{R}^k$ における 2-distance set X の 2 つの距離の比は $\sqrt{\alpha - 1} : \sqrt{\alpha}$ となることが示された（ただし、α は $\alpha \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{k}{2}}$ を満たすある整数)。
　一般の s-distance set X については、Bannai-Bannai-Stanton [2] や Blokhuis [3] によって $|X| \leq \binom{k+s}{s}$ という上限が与えられた。また、$|X| \geq 5$ ならば、$\mathbb{R}^2$ における 3-distance set X は有限個で、$\mathbb{R}^2$ における 3-distance set の点の個数の最大値は 7 である (Shinohara [18]) ということが知られている。$\mathbb{R}^3$ における 3-distance set については、点の個数の最大値は 12 であり、最大値を与える 3-distance set の存在が同型を除けば一意的であることが Shinohara [19] によって示された (講演した時は 14 点 3-distance set の非存在まで分かっていたのであったが、つい最近これが示された)。それにより、$\mathbb{R}^3$ における 3-distance set の個数が (同型を除いて) 有限個になるのは点の個数がいくつのときか？という問題については、その答えを満たす最小の値を a とすると、a は $7 \leq a \leq 12$ の範囲にあることが知られている。しかし、これらの結果を除いては s-distance set についての結果はあまり得られていない。

Table 1: 2-distance set の点の個数の最大値

k	$\binom{k+2}{2}$	2-distance set の 点の個数の最大値	最大値を与える 2-distance set の個数
1	3	3	1
2	6	5	1
3	10	6	6
4	15	10	1
5	21	16	1
6	28	27	1
7	36	29	1
8	45	45	≥ 1

また、2-distance set を考える際の 1 つのアイデアとして、isosceles set というものがあり、次で定義される。

Definition 1.2. $\mathbb{R}^k$ において、n 個の点からなる集合を考える。
この集合の任意の 3 点が 2 等辺 3 角形をなしているとき (同一直線上の 3 点も許す)、この集合は n-point isosceles set であるという。

さらに、この集合が s-distance set であるときは、isosceles n-point s-distance set と呼ぶことにする。

任意の 2-distance set は isosceles set になっていることから、isosceles set は研究されるようになった。

次に、この isosceles set について知られていることをまとめておく。

- $\mathbb{R}^1$ では isosceles set の点の個数の最大値は 3 である。
- $\mathbb{R}^2$ における 7-point isosceles set は存在しない。(Golomb [10], Kelly [11])
- $\mathbb{R}^2$ における 6-point isosceles set は、同型を除けば正 5 角形とその中心の 6 点からなる集合 (次のページの Fig. 1) の唯 1 つに定まる。(Erdös-Fishburn [8], Golomb [10], Kelly [11])
- $\mathbb{R}^2$ における 5-point isosceles set は、同型を除けば Fig. 2 の 3 つの集合に限る。(Fishburn [9], Golomb [10])
- $\mathbb{R}^3$ における 9-point isosceles set は存在しない。(Croft [5])
- $\mathbb{R}^3$ における 8-point isosceles set は、同型を除いて Fig. 3 で表される集合の唯 1 つに定まる。(Kido [14])
- $s \leq 4$ を満たす s に対して、$\mathbb{R}^3$ における isosceles 8-point s-distance set は存在しない。(Kido [14])

- $\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set は同型を除いても無限に存在する。
- $\mathbb{R}^3$ における isosceles 7-point 3-distance set は、同型を除けば Fig. 4 の 15 個に分類される。(Kido [15])

Fig. 1. $\mathbb{R}^2$ における唯 1 つの 6-point isosceles set

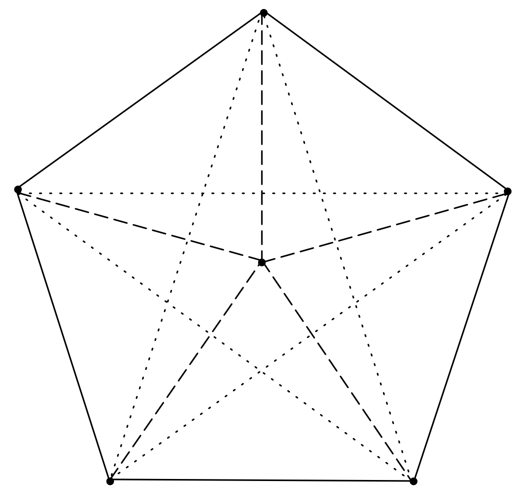


Fig. 2. $\mathbb{R}^2$ における全 3 個の 5-point isosceles set

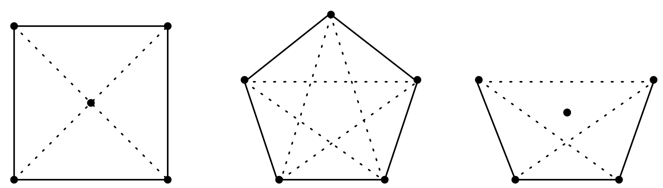


Fig. 3. $\mathbb{R}^3$ における唯 1 つの 8-point isosceles set

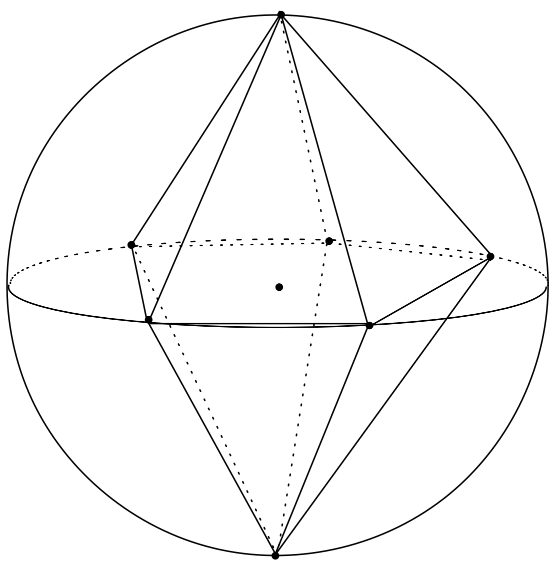
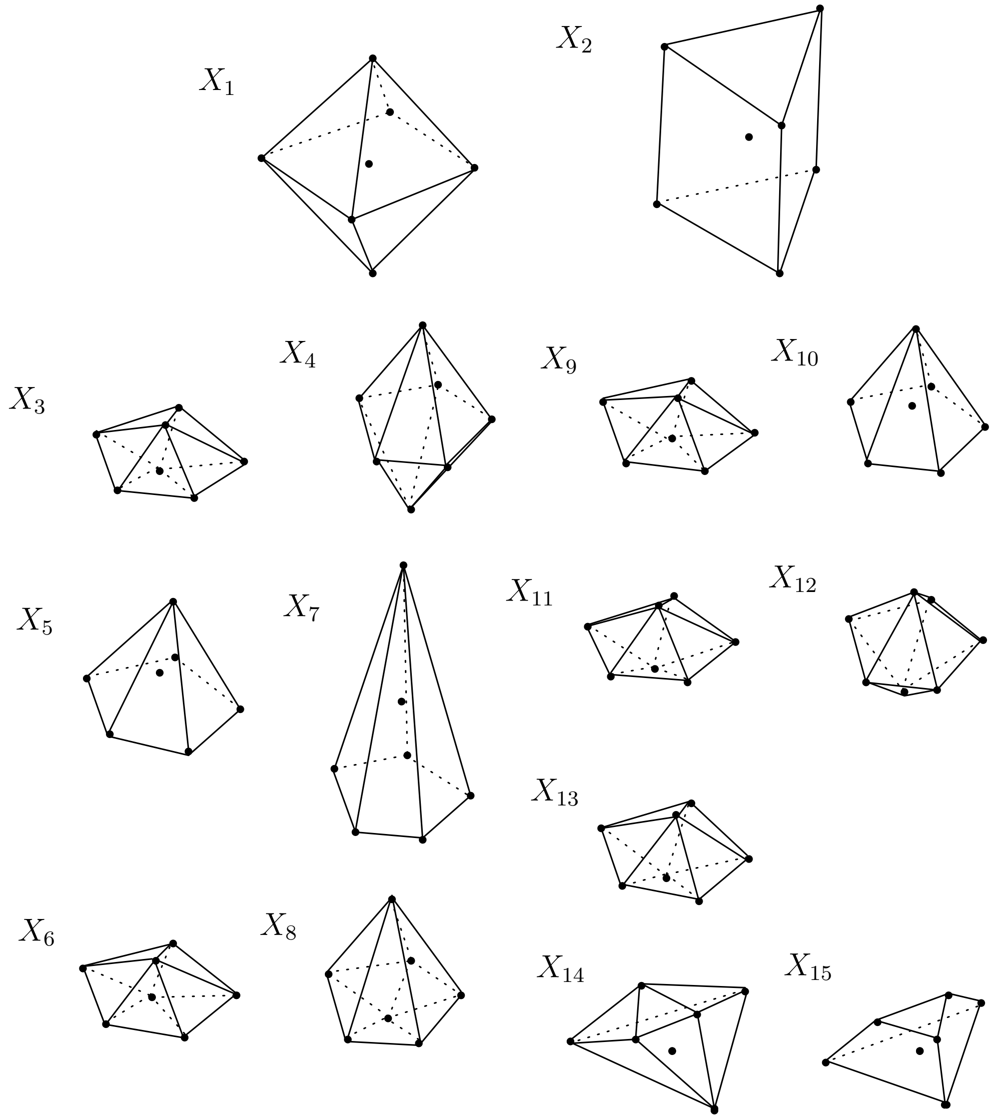


Fig. 4. $\mathbb{R}^3$ における全 15 個の isosceles 7-point 3-distance set



（注意：$X_1, X_2, X_5, X_7, X_{10}, X_{14}, X_{15}$ には線で結ばれていない点が 1 つあるが、これは残りの点から等距離の位置にある点を表している。また、$X_3, X_6, X_9, X_{11}, X_{13}$ は同じように見えるが、正 5 角形の 1 辺の長さと対角線の長さとは異なる 3 つ目の距離が違っていて、互いに相似ではない。同様に X_5 と X_{10} も相似ではない。）

今回は、$\mathbb{R}^4$ における isosceles set の点の個数の最大値について考えた。$\mathbb{R}^4$ における isosceles set については、現時点では 11-point isosceles set の構成は可能であることが分かっていて、次がその例である。

$t=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ とし、$X=\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(-1+t,t,t,t),(t,-1+t,t,t),(t,t,-1+t,t),(t,t,t,-1+t)\}$ とする。すると X は 10-point 2-distance set である (この X は Lisoněk [17] より抜粋)。この 10 点は同一の 3 次元球面上にあるので、球面の中心である $(\frac{5+\sqrt{5}}{10},\frac{5+\sqrt{5}}{10},\frac{5+\sqrt{5}}{10},\frac{5+\sqrt{5}}{10})$ を加えた 11 点集合は 11-point isosceles set となる。

次の定理は本講演における主結果である。

Theorem 1.1. $\mathbb{R}^4$ における 12-point isosceles set は存在しない。したがって、$\mathbb{R}^4$ における isosceles set の点の個数の最大値は 11 である。

$\mathbb{R}^3$ における Croft の手法 [5] を $\mathbb{R}^4$ に拡張することにより、この Theorem 1.1 の証明を行った。証明の概略を次の節以降で述べる。

2 Notation and a fundamental lemma

次の言葉を導入する。
apex : 3 点以上からなる集合において、残りすべての点から等距離の位置にある点

$\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_n\}$ を n-point isosceles set とする。$\mathcal{P}$ の点 P_i の"vertex-number" $V(P_i)$ を $V(P_i)=(P_i$ を含む 3 点からなる部分集合をすべて考え、そのうち、P_i が apex となっているものの数 $)=(\angle P_i$ を頂角とする 2 等辺 3 角形の個数$)$
で定義する。

このとき、

$$V(P_1)+\cdots+V(P_n)\geq\binom{n}{3} \tag{1}$$

が成り立つ。

また、点 P_i から残りの点との距離を考える。距離 a となる点が r 個、距離 b となる点が s 個、$\cdots$、距離 l となる点が u 個あったとき ($a,b,\cdots,l$ は互いに異なり、$r\geq s\geq\cdots\geq u$ とする。また、$r+s+\cdots+u=n-1$)、点 P_i は type$(r,s,\cdots,u)$ の点であるということにする。

P_i が type$(r,s,\cdots,u)$ であるならば、

$$V(P_i)=\binom{r}{2}+\binom{s}{2}+\cdots+\binom{u}{2} \tag{2}$$

が成り立つ。

12-point isosceles set が存在するかどうかを考えるうえで、最も基本的な補題を述べる。

Lemma 2.1. $\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_{12}\}$ を $\mathbb{R}^4$ における 12-point isosceles set とし、P_1 が最大の vertex-number であるとする。このとき、P_1 の type を $(r,s,\cdots,u)$ とすると、それは、次の Case (A) から Case (F) までのいずれかを満たしている。

Case (A): *(11),*

Case (B): $8 \leq r \leq 10$,

Case (C): *(7,4), (7,3,1), (7,2,2), (7,2,1,1),*

Case (D): *(6,5), (6,4,1), (5,5,1),*

Case (E): *(7,1,1,1,1),*

Case (F): *(6,3,2).*

Proof: $V(P_1) + \cdots + V(P_{12}) \geq \binom{12}{3} = 220$ が (1) より成り立つので、 $V(P_1) \geq 19$ となる。

ゆえに、(2) より、

$$\binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \cdots + \binom{u}{2} \geq 19, \tag{3}$$

が成り立ち、さらに、

$$r + s + \cdots + u = 11. \tag{4}$$

も成り立つ。

(3) と (4) の両方を満たすには、$(r, s, \cdots, u)$ は補題にある Case (A) から Case (F) までのいずれかでなければならない。■

3 Sketch of the proof of Theorem 1.1

ポイントとなる補題や命題を以下に紹介することによって（ただし、それらの証明は省略する）、Theorem 1.1 の証明の概略を述べる。

Lemma 2.1 における P_1 の type を Case (A) から Case (F) のそれぞれに場合分けして考察することによって、次の補題が示される。

Lemma 3.1. $\mathbb{R}^4$ における 12-point isosceles set が存在するならば、12 点のうちのある 4 点は同一円周上にある。■

12 点のうちのある 4 点は同一円周上にあることが分かったので、同一円周上の 4 点の配置を考える。次の命題はそれについてのもので、Croft [5] の Lemma 18 と同様に証明できる。

Proposition 3.2. 4-point isosceles set をなす同一円周上の 4 点は、正方形の 4 点もしくは正 5 角形の 4 点に限る。■

Proposition 3.2 より、正方形の 4 点を含む 12-point isosceles set と正 5 角形の 4 点を含む 12-point isosceles set がそれぞれ存在するかどうかを考えればよい。このとき、次の 2 つの結果を得る。

Lemma 3.3. $\mathbb{R}^4$ において、正 5 角形の 4 点を含む 12-point isosceles set は存在しない。■

Lemma 3.4. $\mathbb{R}^4$ において、正方形の 4 点を含む 12-point isosceles set は存在しない。■

以上の結果をまとめると、Theorem 1.1 を得る。■

4 Assignments

今後の研究課題としては、次のようなものが挙げられる。

(i) $\mathbb{R}^3$ における 7-point 3-distance set は同型を除いて有限個なのか？それとも無限に存在するか？

(ii) $s = 3, k \geq 3$ に対して、$\mathbb{R}^k$ における s-distance set の個数が同型を除いて有限個になるのは点の個数がいくつの時か？

(iii) $s = 3, k \geq 4$ に対して、$\mathbb{R}^k$ における s-distance set の点の個数の最大値はいくつになるのか？

(iv) 3-distance set の 3 つの距離の比について何か言えないか?（Larman-Logers-Seidel [16] の拡張）

(v) $n \leq 11$ に対して、同型を除いて有限個であるならば、$\mathbb{R}^4$ における n-point isosceles set を分類できないか？

(vi) $k \geq 5$ に対して、$\mathbb{R}^k$ における isosceles set の点の個数の最大値はいくつになるのか？

また、Fishburn [9] により、isosceles set の概念を拡張した t-isosceles set が以下のように定義された。（ただし、Fishburn [9] ではユークリッド空間の次元 k は 2 と固定されている。）

Definition 4.1. $t \geq 3$ とする。$\mathbb{R}^k$ における n 個の点からなる集合について、2 等辺 3 角形をなしている 3 点（同一直線上の 3 点も許す）が任意の t 点部分集合に存在する時、この集合は n-point t-isosceles set であるという。

これまで考えてきた isosceles set は、この定義の $t = 3$、つまり 3-isosceles set になっている。Fishburn [9] は $k = 2, t = 4$ の場合についての予想や問題提起をしていて、それらについての部分的結果はいくつかの文献で見られる。しかし、isosceles set や s-distance set で考えたような ”点の個数の最大値 ”や ”分類 ”についてはまだ得られていないようである。これについても取り組みたいと考えている。（t-isosceles set については、Brass-Moser-Pach [4] も参照されたい。）

References

[1] 坂内英一、坂内悦子、球面上の代数的組合せ理論、シュプリンガー・フェアラーク東京、1999.

[2] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space, II, *Combinatorica* **3** (1983), 147-152.

[3] A. Blockhuis, Few-distance sets, Ph. D. thesis, Eindhoven Univ. of Technology (1983), (CWI Tract (7) 1984).

[4] P. Brass, W. Moser, and J. Pach, Research Problems in Discrete Geometry, Springer New York, 2005.

[5] H. T. Croft, 9-point and 7-point configuration in 3-space, *Proc. London. Math. Soc.* (3), **12** (1962), 400-424, Corrigendum. ibid. **13** (1963), 384.

[6] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points I, *Indag. Math.* **28** (1966), 479-488. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)

[7] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points II, *Indag. Math.* **28** (1966), 489-504. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)

[8] P. Erdös, and P. Fishburn, Duplicated distances in subsets of finite planar sets, *Geombinatorics* **8** (1999) no.3, 73-77.

[9] P. Fishburn, Isosceles Planar Subsets, *Discrete Comput. Geom.* **19** (1998), 391-398.

[10] M. Golomb, Advanced Problems and Solutions. Isosceles n-points, *Amer. Math. Monthly*, **55** (1948), 513-514.

[11] L. M. Kelly, Elementary Problems and Solutions. Isosceles n-points, *Amer. Math. Monthly*, **54** (1947), 227-229.

[12] 城戸浩章、3 次元ユークリッド空間における isosceles 8-point set の分類、数理解析研究所講究録 1394 代数的組合せ論 (2004), 138-151.

[13] 城戸浩章、3 次元ユークリッド空間における isosceles 7-point 3-distance sets の分類、数理解析研究所講究録 1476 代数的組合せ論とその周辺 (2006), 28-33.

[14] H. Kido, Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **27** (2006), 329-341.

[15] H. Kido, Classification of isosceles 7-point 3-distance sets in 3-dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **28** (2007), 685-704.

[16] D. G. Larman, C. A. Logers, and J. J. Seidel, On two-distance sets in Euclidean space, *Bull. London Math. Soc.*, **9** (1977), 261-267.

[17] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Comb. Theory*, Ser. A.77 (1997), 318-338.

[18] M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **25** (2004), 1039-1058.

[19] M. Shinohara, Uniqueness of maximum 3-distance set in $\mathbb{R}^3$, preprint.