対称関数論からのランダム行列入門*

松本 詔†

概 要

ランダム行列における特性多項式 $\det(I - xM)$ の積の平均を具体的に計算する．ここではランダム行列のモデルとして，(i) ユニタリ群，(ii) シンプレクティック群，(iii) 特殊直交群，(iv) ダイソンの CβE，を考える．(i)–(iii) においては，シューア関数を始めとする群の既約指標を用いて計算する方法を紹介する．また (iv) においては，ジャック関数を用いて計算する．

1 序章

1.1 ランダム行列の特性多項式のモーメント

近年，ランダム行列における特性多項式のモーメントに関する研究が注目されている．それは Keating と Snaith [KS1] によりリーマンゼータ関数のモーメントに関する予想が取り沙汰されてから，非常に活発になった．これについては §6 で少し述べよう．また，魔方陣などの組合せ論との密接な関係も知られている（[FG]）．

ここでは次のような問題を扱う．$\mathcal{M}$ を $N \times N$ 行列のなす適当な空間とし，確率測度 $\mathrm{d}M$ を備えているとする．ここで「確率」測度というのは，すなわち

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}M = 1$$

を満たすことである．このとき，確率空間 $(\mathcal{M}, \mathrm{d}M)$ について考える．$\mathcal{M}$ 上の関数 F に対して，$\langle F \rangle_{\mathcal{M}}$ で F の平均を表すことにする:

$$\langle F \rangle_{\mathcal{M}} = \langle F(M) \rangle_{\mathcal{M}} = \int_{\mathcal{M}} F(M) \mathrm{d}M.$$

$I = I_N$ を（N 次の）単位行列として，次のような問題を考える．

問題 1. 与えられた $(\mathcal{M}, \mathrm{d}M)$ において，特性多項式の積の平均

$$\langle \det(I - x_1 M) \cdots \det(I - x_k M) \rangle_{\mathcal{M}}, \qquad x_1, \dots, x_k \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

を計算せよ．特に，k 次モーメント $\langle \det(I - M)^k \rangle_{\mathcal{M}}$ の値を求めよ．

ここで，一つ単純な例を挙げよう．

例 1.1. $\mathcal{M}$ を 2 次特殊直交群 $SO(2)$ とする．$SO(2)$ の元はいつでも

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 2\pi),$$

*第 12 回代数学若手研究会　2007 年 3 月 3 日〜5 日

†Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science, partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 17006193.

の形をしている．$SO(2)$ 上の確率測度 $\mathrm{d}M$ を $\mathrm{d}M=\mathrm{d}\theta/2\pi$ で与える．ただし，$\mathrm{d}\theta$ は $[0,2\pi)$ 上のルベーグ測度である．このとき，例えば $\det(I-M)$ の 2 乗平均は,

$$
\begin{aligned}
\langle \det(I-M)^2\rangle_{SO(2)} &= \int_0^{2\pi} \det(I-C(\theta))^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \det\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2-2\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta = 6
\end{aligned}
$$

と計算される．

問題 1 は考える $\mathcal{M}$ によって多少変化することを注意しておく．例えば，絶対値のモーメント $\langle|\det(I-M)|^{2k}\rangle_{\mathcal{M}}$ を計算するほうが自然なときもある（例えば，系 2.4 など）．

2000 年以降，問題 1 は，$\mathcal{M}$ がエルミート行列全体や古典群の場合に非常に良く研究されてきた．それらについては [BG] の References を参考にしていただきたい．問題 1 の解決の多くの場合，例えば [KS1] などでは，セルバーグ積分の評価やその拡張を用いて計算されることになるが，一方で [BG] では古典群の表現論を用いた手法が与えられている．それによると，問題 1 の特性多項式の積の平均は，古典群の既約指標を用いて表すことができる．ここでは，それを紹介することを目的とする．§2 から §4 でそれぞれ $\mathcal{M}$ がユニタリ群，シンプレクティック群，特殊直交群のときを述べる．§5 では Dyson の CβE について考える．CβE は §2〜§4 で扱うような群ではないのだが，ジャック関数を用いることで，群の場合と同様の手法が適用することができる．

§2〜§4 は [BG] の内容のサーベイとなっており，この文中で新しい結果は §5 の一部だけであることを注意しておく．

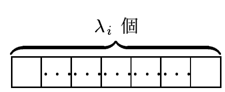
1.2 基本的な記号の準備

記号を準備しておく．$\mathbb{T}$ を単位円 $\mathbb{T}=\{t\in\mathbb{C}\mid |t|=1\}$ とする．また $\mathrm{d}t$ を $\mathbb{T}$ 上の正規化されたハール測度とする．すなわち,

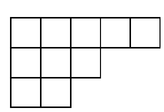
$$
\int_{\mathbb{T}} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}, \qquad f \text{ は任意の } \mathbb{T} \text{ 上の連続関数},
$$

と定める．複素数 $a_1,\ldots,a_k$ に対し，対角成分が $a_1,\ldots,a_k$ となっているような $k\times k$ 対角行列を $\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_k)$ と表す.

[Mac] に従い，分割についての用語を準備する．非負整数の列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ で $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots$，$|\lambda|:=\sum_{j\geq1}\lambda_j<\infty$ となっているものを**分割**とよぶ．$|\lambda|$ を λ の重さという．$\ell(\lambda)$ で 0 でない λ_j の個数を表すこととし，長さと呼ぶ．分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ はしばしば**ヤング図形**と同一視される．ヤング図形は λ_i 個の箱を横に並べたもの

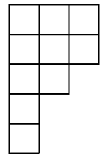


を左詰めで縦に上から並べたものである．例えば，分割 $\lambda=(5,3,2)$ のヤング図形は



となる．

λ の共役な分割 λ' とは，ヤング図形において対角線での転置を対応させる．例えば，上のヤング図形の共役は



となり，$\lambda' = (3,3,2,1,1)$ である．二つの分割 λ, μ に対し，λ のヤング図形が μ のヤング図形に含まれるとき，言い換えれば，$\lambda_i \le \mu_i$ が任意の i で成り立つとき，$\lambda \subset \mu$ とかく．

文中，頻繁にコンパクト群の表現論の言葉（ワイルの指標公式など）を用いるが，それらは [KO, O] などを参照にして頂きたい．

2　ユニタリ群

この章では $\mathcal{M}$ が N 次ユニタリ群

$$U(N) = \{M \in GL(N, \mathbb{C}) \mid MM^* = I\}$$

であるときを考える．これは A_{N-1} 型のルート系に対応する．

$U(N)$ 上の確率測度として，ハール測度 $\mathrm{d}M$ を扱う．測度 $\mathrm{d}M$ は定義から

$$\mathrm{d}(V_1 M V_2) = \mathrm{d}M, \qquad V_1, V_2 \in U(N),$$

という両側不変性を持つ．一般にコンパクト位相群は，このような「両側不変性」をもつ測度が定数倍を除いて一意的に存在することが知られている．よって $\mathrm{d}M$ は $\int_{U(N)} \mathrm{d}M = 1$ と正規化することで一意的にとれる．両側不変性から，測度 $\mathrm{d}M$ は特に共役類上で一定である．

命題 2.1 (ワイルの積分公式). F を $U(N)$ 上の連続な類関数とする．このとき，

$$\int_{U(N)} F(M)\mathrm{d}M = \frac{1}{N!}\int_{\mathbb{T}^N} F(t_1, \ldots, t_N) \prod_{1 \le i < j \le N} |t_i - t_j|^2 \ \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_N.$$

ここで，$F(t_1, \ldots, t_N) = F(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_N))$ としている．

ユニタリ群 $U(N)$ の有限次元既約表現は

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_N \tag{2.1}$$

を満たす列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}^N$ でパラメトライズされる．対応する既約指標を $\chi_\lambda^{U(N)}$ と表す．これはユニタリ行列の固有値にしか依存しないので，$t_1, \ldots, t_N$ を $M \in U(N)$ の固有値とすると，$\chi_\lambda^{U(N)}(M) = \chi_\lambda^{U(N)}(t_1, \ldots, t_N)$ と書くこともできる．

命題 2.2 (ワイルの指標公式). 既約指標 $\chi_\lambda^{U(N)}$ は次で与えられる．

$$\chi_\lambda^{U(N)}(M) = s_\lambda(t_1, \ldots, t_N) = \frac{\det(t_j^{\lambda_i + N - i})_{1 \le i,j \le N}}{\det(t_j^{N-i})_{1 \le i,j \le N}}.$$

関数 $s_\lambda(t_1,\dots,t_N)$ は変数 $t_1,\dots,t_N$ についての対称多項式になっている．この s_λ を**シューア関数**という（[Mac]）．定義式の分母は，ヴァンデルモンドの行列式である．

$$\det(t_j^{N-i})_{1\le i,j\le N} = \prod_{1\le i<j\le N}(t_i-t_j).$$

χ^λ は既約指標だから，次の直交性を満たす．

$$\int_{U(N)} \chi_\lambda^{U(N)}(M)\overline{\chi_\mu^{U(N)}(M)}\mathrm{d}M = \delta_{\lambda\mu}. \tag{2.2}$$

ここで，$\lambda,\mu\in\mathbb{Z}^N$ は関係式 (2.1) を満たす列．

またシューア関数は次の双対コーシー恒等式と呼ばれる恒等式を満たす（[Mac, §I-4]）．

$$\sum_{\substack{\lambda:\text{分割}\\ \lambda\subset(N^k)}} s_{\lambda'}(x_1,\dots,x_k)s_\lambda(t_1,\dots,t_N) = \prod_{i=1}^k\prod_{j=1}^N(1+x_it_j). \tag{2.3}$$

ここで，$(N^k)=(\underbrace{N,N,\dots,N}_{k})$ である．

以上を用いて，ユニタリ群の場合の問題 1 の答えとして，次を得ることができる．次の定理は [CFKRS] で最初に得られ，また以下の証明は [BG] で与えられている．

定理 2.3. $\alpha_1,\dots,\alpha_{L+K}$ を複素数とするとき，

$$\left\langle \prod_{l=1}^L \det(I+\alpha_l^{-1}M^{-1})\cdot\prod_{k=1}^K\det(I+\alpha_{L+k}M)\right\rangle_{U(N)} = \prod_{l=1}^L\alpha_l^{-N}\cdot s_{(N^L)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{K+L}).$$

このように，左辺のような特性多項式の積の平均は，シューア関数で表せる．

証明．まず，

$$\prod_{l=1}^L \det(I+\alpha_l^{-1}M^{-1})\cdot\prod_{k=1}^K\det(I+\alpha_{L+k}M) = \prod_{l=1}^L\alpha_l^{-N}\cdot\overline{\det(M)^L}\cdot\prod_{k=1}^{K+L}\det(I+\alpha_kM)$$

となる．ここで，$\det(M)^L=(t_1\cdots t_N)^L = s_{(L^N)}(t_1,\dots,t_N)=\chi_{(L^N)}^{U(N)}(M)$ であって，また (2.3) から

$$\prod_{k=1}^{K+L}\det(I+\alpha_kM) = \prod_{k=1}^{K+L}\prod_{j=1}^N(1+\alpha_kt_j) = \sum_\lambda s_{\lambda'}(\alpha_1,\dots,\alpha_{L+K})\chi_\lambda^{U(N)}(M)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
&\left\langle \prod_{l=1}^L \det(I+\alpha_l^{-1}M^{-1})\cdot\prod_{k=1}^K\det(I+\alpha_{L+k}M)\right\rangle_{U(N)}\\
=&\prod_{l=1}^L\alpha_l^{-N}\cdot\sum_\lambda s_{\lambda'}(\alpha_1,\dots,\alpha_{L+K})\left\langle\chi_\lambda^{U(N)}(M)\overline{\chi_{(L^N)}^{U(N)}(M)}\right\rangle_{U(N)}\\
=&\prod_{l=1}^L\alpha_l^{-N}\cdot s_{(N^L)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{L+K}) \qquad \text{by (2.2)}.
\end{aligned}$$

□

系 2.4. 任意の $\xi \in \mathbb{T}$ に対し，

$$\left\langle |\det(I+\xi M)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} = s_{(N^k)}(\underbrace{1,\ldots,1}_{2k}) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{j!\,(j+2k)!}{\{(j+k)!\}^2}.$$

特に，これは ξ に依らない．

最初の等式は，前定理から明らか．二つ目の等式は，次の命題（[Mac, §I-3 Ex.4]）から計算される．この特性多項式の絶対値の $2k$ 次モーメントの N を無限大にするときの漸近挙動にも興味がある．これはすなわち行列のサイズをどんどん大きくすることである．これについては §6 でも少し述べる（[KS1] も参照）．

命題 2.5 (ワイルの次元公式). $\ell(\lambda) \le n$ なる分割 λ に対し，

$$\chi_\lambda^{U(n)}(\mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})) = s_\lambda(\underbrace{1,\ldots,1}_{n}) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \frac{n+c(i,j)}{h_\lambda(i,j)}.$$

ここで，

$$c(i,j) = j-i, \qquad h_\lambda(i,j) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1.$$

3 シンプレクティック群

ここでは，$\mathcal{M}$ がシンプレクティック群[1]

$$Sp(2N) = \{M \in U(2N) \mid MJM^{\mathrm{T}} = J\}.$$

のときを考える．ここで，M^{T} は行列 M の転置で，

$$J = \begin{pmatrix} O_N & I_N \\ -I_N & O_N \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

である．これは C_N 型のルート系に対応している．問題 1 の議論は全く前章と並行している．よってここでは詳しい議論は省略し，必要な式だけを与えていこう．シンプレクティック行列 M の $2N$ 個の固有値は，$t_1^{\pm 1}, \ldots, t_N^{\pm 1} \in \mathbb{T}$ というふうになっていることに注意しよう．$\mathrm{d}M$ を $Sp(2N)$ の正規化されたハール測度とする．

命題 3.1 (ワイルの積分公式). F を $Sp(2N)$ 上の連続な類関数とする．このとき，

$$\int_{Sp(2N)} F(M)\mathrm{d}M = \frac{1}{2^N N!} \int_{\mathbb{T}^N} F(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_N^{\pm 1}) \prod_{1 \le i < j \le N} |(t_i - t_j)(t_i t_j - 1)|^2 \cdot \prod_{k=1}^{N} |t_k^2 - 1|^2 \, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_N.$$

ここで，$F(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_N^{\pm 1}) = F(\mathrm{diag}(t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_N, t_N^{-1}))$ としている．

$Sp(2N)$ の有限次元既約表現は，長さ N 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ でパラメトライズされる．対応する既約指標を $\chi_\lambda^{Sp(2N)}(M) = \chi_\lambda^{Sp(2N)}(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_N^{\pm 1})$ と表すことにする．

命題 3.2 (ワイルの指標公式).

$$\chi_\lambda^{Sp(2N)}(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_N^{\pm 1}) = \frac{\det(t_j^{\lambda_i + N - i + 1} - t_j^{-(\lambda_i + N - i + 1)})_{1 \le i,j \le N}}{\det(t_j^{N-i+1} - t_j^{-(N-i+1)})_{1 \le i,j \le N}}.$$

[1] ユニタリ・シンプレクティック群とも呼ばれ，$USp(2N)$ と書くこともある．また，$Sp(2N)$ を $Sp(N)$ と書くこともある．

この既約指標は，**シンプレクティック・シューア関数**，または C 型のシューア関数などと呼ばれる．指標の分母は次のようにかける（**ワイルの分母公式**）．

$$\det(t_j^{N-i+1} - t_j^{-(N-i+1)})_{1\le i,j\le N} = \frac{\prod_{1\le i<j\le N}(t_i - t_j)(t_i t_j - 1)\cdot\prod_{k=1}^{N}(t_k^2-1)}{(t_1\cdots t_N)^N}.$$

双対コーシー恒等式は次の形で与えられる（[BG, Lemma 4]）．

$$\sum_{\lambda\subset(N^k)}(-1)^{|\widetilde{\lambda}|}\chi_\lambda^{Sp(2k)}(x_1^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1})\chi_{\widetilde{\lambda}}^{Sp(2N)}(t_1^{\pm1},\dots,t_N^{\pm1}) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{N}(x_i + x_i^{-1} - t_j - t_j^{-1}).$$

ここで，$\widetilde{\lambda} = (k-\lambda'_N,\dots,k-\lambda'_1)$.

次の式は，[O, 系 12.15] で見ることができる．

命題 3.3 (ワイルの次元公式).

$$\chi_\lambda^{Sp(2n)}(\mathrm{diag}(1,\dots,1)) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}\prod_{j=1}^{\lambda_i}\frac{2n + c_\lambda^{Sp}(i,j)}{h_\lambda(i,j)}.$$

ここで，

$$c_\lambda^{Sp}(i,j) = \begin{cases} i+j-\lambda'_i-\lambda'_j, & i\le j \text{ のとき}, \\ \lambda_i+\lambda_j-i-j+2, & i>j \text{ のとき}. \end{cases}$$

以上から，次を得ることができる（[BG]）．

定理 3.4. $x_1,\dots,x_k$ を複素数とする．このとき，

$$\left\langle \prod_{j=1}^{k}\det(I + x_j M)\right\rangle_{Sp(2N)} = (x_1\cdots x_k)^N\chi_{(N^k)}^{Sp(2k)}(x_1^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1}).$$

ここで左辺では $Sp(2N)$ で平均をとっているが，右辺に出てくる既約指標は $Sp(2N)$ ではなく $Sp(2k)$ の指標であることに注意しよう．

系 3.5.

$$\langle\det(I\pm M)^k\rangle_{Sp(2N)} = \frac{(N+k)!}{N!\,k!}\prod_{j=1}^{k}\frac{(k+2N+j)!\,j!}{(2j+2N)!\,(2j-1)!}.$$

注意 3.1. 次の（A 型の）シューア関数による表示も知られている（[BR]）．

$$\left\langle \prod_{j=1}^{k}\det(I + x_j M)\right\rangle_{Sp(2N)} = \sum_{\substack{\lambda:\mathrm{even} \\ \lambda_1\le 2N}} s_\lambda(x_1,\dots,x_k).$$

ここで λ が even であるとは，全ての λ_j が偶数であるときをいう．

4 特殊直交群

ここでは，$\mathcal{M}$ が特殊直交群

$$SO(N) = \{M\in GL(N,\mathbb{R}) \mid M^{\mathrm{T}}M = I,\ \det(M)=1\}$$

の場合を考える．

4.1 $N = 2n+1$ のとき

このときは B_n 型のルート系に対応している．$M \in SO(2n+1)$ の固有値は，$t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}, 1$ というふうになっている．

命題 4.1 (ワイルの積分公式)． F を $SO(2n+1)$ 上の連続な類関数とする．このとき，

$$\int_{SO(2n+1)} F(M)\mathrm{d}M = \frac{1}{2^n\, n!} \int_{\mathbb{T}^n} F(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}) \prod_{1 \le i < j \le n} |(t_i - t_j)(t_i t_j - 1)|^2 \cdot \prod_{k=1}^{n} |t_k - 1|^2 \ \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n.$$

ここで，$F(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}) = F(\mathrm{diag}(t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}, 1))$ としている．

有限次元既約表現は，シンプレクティック群のときと同様に，長さが n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ でパラメトライズされる．対応する既約指標を $\chi_\lambda^{SO(2n+1)}(M) = \chi_\lambda^{SO(2n+1)}(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1})$ と表すことにする．

命題 4.2 (ワイルの指標公式)．

$$\chi_\lambda^{SO(2n+1)}(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}) = \frac{\det(t_j^{\lambda_i + n - i + 1/2} - t_j^{-(\lambda_i + n - i + 1/2)})_{1 \le i,j \le n}}{\det(t_j^{n-i+1/2} - t_j^{-(n-i+1/2)})_{1 \le i,j \le n}}.$$

既約指標の分母は，次のようにもかける（**ワイルの分母公式**）．

$$\det(t_j^{n-i+1/2} - t_j^{-(n-i+1/2)})_{1 \le i,j \le n} = \frac{\prod_{1 \le i < j \le n}(t_i - t_j)(t_i t_j - 1) \cdot \prod_{k=1}^{n}(1 - t_k)}{(t_1 \cdots t_n)^{n-1/2}}.$$

双対コーシー恒等式（[BG, Lemma 6]）：

$$\sum_{\lambda \subset (n^k)} (-1)^{|\widetilde{\lambda}|} \chi_\lambda^{SO(2k+1)}(x_1^{\pm 1}, \ldots, x_k^{\pm 1}) \chi_{\widetilde{\lambda}}^{SO(2n+1)}(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n} (x_i + x_i^{-1} - t_j - t_j^{-1}).$$

ここで，$\widetilde{\lambda} = (k - \lambda_n', \ldots, k - \lambda_1')$.

一方，直交群 $O(N)$ の有限次元既約表現は，

$$\lambda_1' + \lambda_2' \le N$$

を満たす分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ でパラメトライズされる．このとき特に，$\ell(\lambda) = \lambda_1' \le N$ となっている．対応する指標を $\chi_\lambda^{O(N)}$ と書くと，次が成り立つ（[O, 系 12.15]）．

命題 4.3 (ワイルの次元公式)．

$$\chi_\lambda^{O(N)}(\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{N})) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \frac{N + c_\lambda^O(i,j)}{h_\lambda(i,j)}.$$

ここで，

$$c_\lambda^O(i,j) = \begin{cases} i + j - \lambda_i' - \lambda_j' - 2, & i < j \text{ のとき}, \\ \lambda_i + \lambda_j - i - j, & i \ge j \text{ のとき}. \end{cases}$$

既約指標 $\chi_\lambda^{O(2n+1)}$ の $SO(2n+1)$ への制限は，再び既約指標になる．すなわち，

$$\chi_\lambda^{O(2n+1)}(M) = \chi_\lambda^{SO(2n+1)}(M), \qquad M \in SO(2n+1).$$

結局，次を得る（[BG]）．

定理 4.4. $x_1, \dots, x_k$ を複素数とする．このとき，

$$\left\langle \prod_{j=1}^{k} \det(I - x_j M) \right\rangle_{SO(2n+1)} = (x_1 \cdots x_k)^n \prod_{i=1}^{k} (1 - x_i) \cdot \chi_{(n^k)}^{SO(2k+1)}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}).$$

系 4.5.

$$\langle \det(I + M)^k \rangle_{SO(2n+1)} = 2^k \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(2k+2j+1)!\,(2j)!}{(k+j)!\,(n+k+j)!}.$$

4.2 $N = 2n$ のとき

このときは D_n 型のルート系に対応している．$M \in SO(2n)$ の固有値は，$t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}$ というふうになっている．

命題 4.6 (ワイルの積分公式). F を $SO(2n)$ 上の連続な類関数とする．このとき，

$$\int_{SO(2n)} F(M)\mathrm{d}M = \frac{1}{2^{n-1}\,n!} \int_{\mathbb{T}^n} F(t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}) \prod_{1 \le i < j \le n} |(t_i - t_j)(t_i t_j - 1)|^2 \ \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n.$$

ここで，$F(t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}) = F(\mathrm{diag}(t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}))$ としている．

有限次元既約表現は，

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_{n-1} \ge |\lambda_n|$$

を満たすような $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ でパラメトライズされる．特に長さ n 以下の分割 λ に対し，

$$\lambda_+ = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n), \qquad \lambda_- = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, -\lambda_n)$$

とおくとき，$\lambda_n \neq 0$ の分割 λ に対しては 2 種類の既約表現が対応することになる．

対応する既約指標を $\chi_\lambda^{SO(2n)}(M) = \chi_\lambda^{SO(2n)}(t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1})$ と表すことにする．

命題 4.7 (ワイルの指標公式).

$$\chi_\lambda^{SO(2n)}(t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}) = \frac{\det(t_j^{\lambda_i + n - i} + t_j^{-(\lambda_i + n - i)})_{1 \le i,j \le n} + \det(t_j^{\lambda_i + n - i} - t_j^{-(\lambda_i + n - i)})_{1 \le i,j \le n}}{\det(t_j^{n-i} - t_j^{-(n-i)})_{1 \le i,j \le n}}.$$

既約指標の分母は，次のようにもかける（**ワイルの分母公式**）．

$$\det(t_j^{n-i} - t_j^{-(n-i)})_{1 \le i,j \le n} = \frac{\prod_{1 \le i < j \le n} (t_i - t_j)(t_i t_j - 1)}{(t_1 \cdots t_n)^{n-1}}.$$

双対コーシー恒等式（[BG, Lemma 5]）：

$$\sum_{\lambda \subset (N^k)} (-1)^{|\widetilde{\lambda}|} (\chi_{\lambda_+}^{SO(2k)}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) \chi_{\widetilde{\lambda}_+}^{SO(2n)}(t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}) + \chi_{\lambda_-}^{SO(2k)}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) \chi_{\widetilde{\lambda}_-}^{SO(2n)}(t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}))$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n} (x_i + x_i^{-1} - t_j - t_j^{-1}).$$

ここで，$\widetilde{\lambda} = (k - \lambda'_n, \dots, k - \lambda'_1)$.

$\chi_\lambda^{O(2n)}$ を既約指標とする（したがって，λ は $\lambda'_1 + \lambda'_2 \le 2n$ なる分割）．このとき，次の分岐則が成り立つ．$M \in SO(2n)$ に対し，

$$\chi_\lambda^{O(2n)}(M) = \begin{cases} (\chi_{\lambda_+}^{SO(2n)} + \chi_{\lambda_-}^{SO(2n)})(M), & \lambda_n \neq 0 \text{ のとき}, \\ \chi_\lambda^{SO(2n)}(M), & \lambda_n = 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

以上から次を得ることができる（[BG]）．

定理 4.8. $x_1, \dots, x_k$ を複素数とする．このとき，

$$\left\langle \prod_{j=1}^{k} \det(I + x_j M) \right\rangle_{SO(2n)} = (x_1 \cdots x_k)^n \chi_{(n^k)}^{O(2k)}(x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}).$$

注意 4.1. $Sp(2N)$ のときと同様に，これもシューア関数を用いて書ける [BR].

$$\left\langle \prod_{j=1}^{k} \det(I + x_j M) \right\rangle_{SO(2n)} = \sum_{\substack{\lambda':\mathrm{even} \\ \lambda_1 \le 2n}} s_\lambda(x_1, \dots, x_k) + \sum_{\substack{\lambda':\mathrm{odd} \\ \lambda_1 \le 2n}} s_\lambda(x_1, \dots, x_k)$$

ここで λ が odd であるとは，全ての $\lambda_j (\neq 0)$ が奇数であるときをいう．

系 4.9.

$$\langle \det(I \pm M)^k \rangle_{SO(2n)} = 2^{nk} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(n+j-1)!\,(2k+2j-1)!!}{(n+k+j-1)!\,(2j-1)!!}.$$

5 Dyson の CβE

（狭義の）Dyson の CβE とは，COE, CUE, CSE と呼ばれる 3 つのランダム行列モデルの総称である．後で述べるように，それぞれ $\beta = 1, 2, 4$ が対応している．

5.1 円ユニタリアンサンブル：CUE $\beta = 2$

CUE は §2 で考えたユニタリ群 $U(N)$ と同じものである．すなわち，$E_{N,2} = U(N)$ とし，$U(N)$ のハール測度 $\mathrm{d}M$ を考える．このとき，行列の固有値 $t_1, \dots, t_N$ は，確率空間 $(E_{N,2}, \mathrm{d}M)$ 上の確率変数の列である．これらの同時密度関数は命題 2.1 から

$$\mathfrak{M}_{N,2}(t_1, \dots, t_N) = \frac{1}{N!} \prod_{1 \le i < j \le N} |t_i - t_j|^2$$

であることが分かる．

5.2 円直交アンサンブル：COE $\beta = 1$

空間 $E_{N,1}$ を N 次の対称ユニタリ行列全体とする．

$$E_{N,1} = \{M \in U(N) \mid M^{\mathrm{T}} = M\}.$$

これは今までの場合と異なり，群ではないことに注意しよう．このとき，$E_{N,1}$ 上の確率測度 $\mathrm{d}M$ で，

$$\mathrm{d}(W^{\mathrm{T}}MW) = \mathrm{d}M, \qquad W \text{ は } U(N) \text{ の任意の元},$$

となるものが唯一つ存在する（[Me]）．確率空間 $(E_{N,1}, \mathrm{d}M)$ を COE という．このとき，固有値 $t_1, \ldots, t_N \in \mathbb{T}$ の密度関数は，

$$\mathfrak{M}_{N,1}(t_1, \ldots, t_N) = C_{N,1} \prod_{1 \le i < j \le N} |t_i - t_j|$$

とかけることが知られている．定数 $C_{N,1}$ は，$\int_{\mathbb{T}^N} \mathfrak{M}_{N,1}(t_1, \ldots, t_N)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_N = 1$ となるように選ぶが，具体的な値は後で見る．

任意の $M \in E_{N,1}$ は，直交行列で対角化可能である．すなわち，ある $O \in O(N)$ と対角行列 T が存在して，$M = O^{-1}TO$ とかける．よって，固有値にのみ依存するような $E_{N,1}$ 上の連続関数 F に対して，

$$\langle F \rangle_{\mathrm{COE},N} = \int_{E_{N,1}} F(M)\mathrm{d}M = \int_{\mathbb{T}^N} F(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_N))\mathfrak{M}_{N,1}(t_1, \ldots, t_N)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_N$$

である．

5.3 円シンプレクティックアンサンブル：CSE $\quad \beta = 4$

空間 $E_{N,4}$ を $2N$ 次の自己双対ユニタリ行列全体とする．すなわち，

$$E_{N,4} = \{M \in U(2N) \mid M^{\mathrm{D}} = M\}.$$

ただし，$M^{\mathrm{D}} := JM^{\mathrm{T}}J^{\mathrm{T}}$ としていて，J は (3.1) で与えられているものである．このとき，$E_{N,4}$ 上の確率測度 $\mathrm{d}M$ で，

$$\mathrm{d}(W^{\mathrm{D}}MW) = \mathrm{d}M, \qquad W \text{ は } U(2N) \text{ の任意の元},$$

となるものが唯一つ存在する（[Me]）．確率空間 $(E_{N,4}, \mathrm{d}M)$ を CSE という．このとき，$M \in E_{N,4}$ の $2N$ 個の固有値は，$t_1, t_1, t_2, t_2, \ldots, t_N, t_N \in \mathbb{T}$ という形になる．この中の N 個の点 $t_1, \ldots, t_N \in \mathbb{T}$ の密度関数は，

$$\mathfrak{M}_{N,4}(t_1, \ldots, t_N) = C_{N,4} \prod_{1 \le i < j \le N} |t_i - t_j|^4$$

という形でかけることが知られている．

任意の $M \in E_{N,4}$ はシンプレクティック行列で対角化できる．すなわち，ある $S \in Sp(2N)$ と対角行列 T が存在して，$M = S^{-1}TS = S^{\mathrm{D}}TS$ とかける．$E_{N,4}$ 上の関数 F が固有値にのみ依存するならば，

$$\langle F \rangle_{\mathrm{CSE},N} = \int_{E_{N,4}} F(M)\mathrm{d}M = \int_{\mathbb{T}^N} F(\mathrm{diag}(t_1, t_1, t_2, t_2, \ldots, t_N, t_N))\mathfrak{M}_{N,4}(t_1, \ldots, t_N)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_N$$

である．

注意 5.1. 空間 $E_{N,4}$ は四元数を用いて表すこともできる（[Me]）． □

5.4 COE・CSE と対称空間

COE と CSE は対称空間と見なすこともできる．[Du] に倣ってそれを述べよう．

まず，COE の場合．$G(N) = U(N)$，$K(N) = O(N)$ とおく．$\Omega(g) = (g^{\mathrm{T}})^{-1}$ を $G(N)$ 上の involution とすると，$K(N) = \{g \in G(N) \mid \Omega(g) = g\}$ である．よって，$G(N)/K(N)$ は対称空間 ([KO]) であり，

$$G(N)/K(N) \simeq E_{N,1} \qquad ; \qquad g \mapsto g\Omega(g)^{-1} = gg^{\mathrm{T}}$$

と同一視される．COE の確率測度 $\mathrm{d}M$ は，自然な射影 $G(N) \to G(N)/K(N) \simeq E_{N,1}$ によって，$G(N)$ のハール測度から導かれる．

CSE は，$G(N) = U(2N), K(N) = Sp(2N), \Omega(g) = (g^{\mathrm{D}})^{-1}$ とすれば同様である．

5.5 一般の $\beta > 0$

$\beta > 0$ とする．任意の $(t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{T}^n$ に対し，

$$\mathfrak{M}_{N,\beta}(t_1, \ldots, t_N) = C_{N,\beta} \cdot \prod_{1 \le i < j \le N} |t_i - t_j|^\beta$$

とおく．ここで，定数 $C_{N,\beta}$ は，

$$(C_{N,\beta})^{-1} = \int_{\mathbb{T}^N} \prod_{1 \le i < J \le N} |t_i - t_j|^\beta \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_N$$

で定まる．この値は次のように書けることが知られている（[Me, AAR]）．

$$(C_{N,\beta})^{-1} = \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2}N + 1)}{\Gamma(\frac{\beta}{2} + 1)^N}.$$

このとき，確率空間 $(\mathbb{T}^N, \mathfrak{M}_{N,\beta}(t_1, \ldots, t_N)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_N)$ を（広義の）CβE と呼ぶ[2]．既に見たように，$\beta = 1, 2, 4$ のときはそれぞれ COE, CUE, CSE の固有値の密度分布に対応している．

$\mathbb{T}^N$ 上の対称関数 F に対し，

$$\langle F \rangle_{\mathrm{C}\beta\mathrm{E},N} := \int_{\mathbb{T}^n} F(t_1, \ldots, t_N)\mathfrak{M}_{N,\beta}(t_1, \ldots, t_N)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_N$$

とおく．これは，F の CβE における平均に他ならない．

5.6 特性多項式

$(t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{T}^N$ と $\eta \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\Psi(t_1, \ldots, t_N; \eta) = \prod_{j=1}^N (1 + \eta t_j)$$

とおく．

[2]「広義」・「狭義」という使い分けは，一般にはされない．ここだけの用語である．

M を $E_{N,1}$ または $E_{N,2}$ の元であるとし，$t_1,\ldots,t_N$ を M の固有値とすると，明らかに，

$$\Psi(t_1,\ldots,t_N;\eta)=\det(I+\eta M)$$

であり，$\Psi(t_1,\ldots,t_N;\eta)$ は行列 M の特性多項式に他ならない．

$M\in E_{N,4}$ としよう．このとき，M の固有値を $t_1,t_1,\ldots,t_N,t_N$ とすると，

$$\Psi(t_1,\ldots,t_N;\eta)^2=\det(I+\eta M)$$

である．特に，JM は交代行列（すなわち $(JM)^{\mathrm{T}}=-JM$ ）であるから，

$$|\Psi(t_1,\ldots,t_N;\eta)|=|\mathrm{pf}(J+\eta JM)|$$

が成り立つ．ここで，pf はパフィアンである．

したがって，一般の $\beta>0$ においても $\Phi(t_1,\ldots,t_N;\eta)$ を $(t_1,\ldots,t_N)\in\mathbb{T}^N$ の**特性多項式**と呼ぶことにする．

5.7 ジャック多項式

さて，CβE における特性多項式のモーメントを計算したいのだが，§2〜§4 で考えた状況と異なり群を考えているわけではないので,「指標」をとるということが意味を成さない．そこでこの場合ではジャック多項式を用いる．

ジャック多項式 $P_\lambda^{(\alpha)}(x_1,\ldots,x_N)$ はパラメータ $\alpha>0$ をもち，また λ は分割である．特に $\alpha=1$ のとき，$P_\lambda^{(1)}(x_1,\ldots,x_N)$ はシューア多項式 $s_\lambda(x_1,\ldots,x_N)$ に一致する．ジャック多項式は次のような直交性を持つ．異なる分割 λ と μ に対し，

$$\int_{\mathbb{T}^N}P_\lambda^{(\alpha)}(t_1,\ldots,t_N)\overline{P_\mu^{(\alpha)}(t_1,\ldots,t_N)}\mathfrak{M}_{N,2/\alpha}(t_1,\ldots,t_N)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_N=0.$$

また双対コーシー恒等式

$$\sum_{\substack{\lambda:\text{分割}\\ \lambda\subset(N^k)}}P_{\lambda'}^{(1/\alpha)}(x_1,\ldots,x_k)P_\lambda^{(\alpha)}(t_1,\ldots,t_N)=\prod_{i=1}^k\prod_{j=1}^N(1+x_it_j)$$

を満たす．その他，ジャック多項式の詳しい性質は [Mac, §VI-10] を参照されたい．

5.8 モーメントの計算

今までとほとんど同様の議論により，ジャック多項式を用いることで特性多項式の積の平均が計算できる．次の定理は，この文中で唯一の新しい結果である．また，[Mat1] ではマクドナルド多項式を用いて，これの拡張も与えている．

定理 5.1. $\alpha_1,\ldots,\alpha_{L+K}$ を複素数とするとき，

$$\left\langle\prod_{l=1}^L\Psi(t_1^{-1},\ldots,t_N^{-1};\alpha_l^{-1})\cdot\prod_{k=1}^K\Psi(t_1,\ldots,t_N;\alpha_{L+k})\right\rangle_{\mathrm{C}\beta\mathrm{E},N}=\prod_{l=1}^L\alpha_l^{-N}\cdot P_{(N^L)}^{(\beta/2)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{K+L}).$$

系 5.2. 任意の $\xi \in \mathbb{T}$ に対し，

$$\left\langle |\Psi(t_1,\dots,t_N;\xi)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{C}\beta\mathrm{E},N} = P^{(\beta/2)}_{(N^k)}(\underbrace{1,\dots,1}_{2k}) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2}j+1)\,\Gamma(\frac{\beta}{2}j+2k+1)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}j+k+1)^2}. \tag{5.1}$$

これらで $\beta = 2$ とすると，定理 2.3 と系 2.4 が復元される．また (5.1) の最後の積表示は [KS1] で既に得られている．ただし，[KS1] ではセルバーグ積分の計算を通じて得られており，k は非負整数に限ってはいない．ジャック多項式を通じた証明はここが初である．

6 補足： リーマンゼータ関数のモーメント

最後に，問題 1 の動機の一つとなっているリーマンゼータ関数との関係について述べておこう．まず系 2.4 で計算した $U(N)$ での特性多項式のモーメント

$$\left\langle |\det(I+\xi M)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{j!\,(j+2k)!}{\{(j+k)!\}^2}, \qquad \xi \in \mathbb{T},$$

において，

$$f_{\mathrm{CUE}}(k) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{k^2}} \left\langle |\det(I+\xi M)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \tag{6.1}$$

とおくと，これは存在して

$$f_{\mathrm{CUE}}(k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

となる.（CUE と §2 で考えたユニタリ群は同じものであったことを思い出そう.）

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ は

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

で定義される複素関数である．これは全複素平面 $\mathbb{C}$ へ有理型関数として解析接続される．そのとき $s=1$ で 1 位の極となり，その他に極を持たない．また $s=-2k$ $(k=1,2,\dots)$ では $\zeta(s)=0$ となり，これらの s は自明な零点と呼ばれる．一方，それ以外の零点はすべて $0<\mathrm{Re}(s)<1$ の範囲にあることが知られていて，それらは非自明な零点と呼ばれる．有名な未解決問題の一つである**リーマン予想**は，この非自明な零点が全て直線 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ の上にあるという主張である．

直線 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ は critical line と呼ばれる．この critical line でのリーマンゼータ関数の絶対値のモーメントが研究されている．

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{(\log T)^{k^2}} \int_0^T |\zeta(1/2+\sqrt{-1}t)|^{2k} \frac{\mathrm{d}t}{T} = f(k)a(k) \tag{6.2}$$

となるような $f(k)$ が存在することが各 k（k は必ずしも正整数でなくてもよい）において期待されていて，さらにこの $f(k)$ を具体的に求めるという問題がある．ここで，$a(k)$ は

$$a(k) = \prod_{p:\text{素数}} \left\{ (1-1/p)^{k^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m}^2 p^{-m} \right) \right\}$$

で定まる．Keating と Snaith [KS1] は,

$$f(k) = f_{\mathrm{CUE}}(k)$$

と予想した．これは $k = 1, 2$ のときは実際に正しいことが示されているが，$k \geq 3$ では未解決である．

式 (6.1) と (6.2) を見比べると，

$$N \longleftrightarrow \log T, \qquad \det(I + \xi M) \longleftrightarrow \zeta(1/2 + \sqrt{-1}t),$$

といった対応が見られる．さらに，η の関数 $\det(I + \eta M)$ の零点は全て $\mathbb{T}$ 上であるから，$\mathbb{T}$ を特性多項式の critical line と見なすと，(6.1) と (6.2) は共に，critical line でのモーメントを考えていることになっている．

その他の古典群である $Sp(2N)$ や $SO(N)$ の場合では，リーマンゼータ関数ではなく L 関数との同様の予想がある [KS2].

参考文献

[AAR] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, "Special Functions", Encyclopedia Math. Appl. 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[BR] J. Baik and E. M. Rains, Algebraic aspects of increasing subsequences, Duke Math. J. **109** (2001), 1–65.

[BG] D. Bump and A. Gamburd, On the averages of characteristic polynomials from classical groups, Commun. Math. Phys. **265** (2006), 227–274.

[CFKRS] J. B. Conrey, D. W. Farmer, J. P. Keating, M. O. Rubinstein, and N. C. Snaith, Autocorrelation of random matrix polynomials, Commun. Math. Phys. **237** (2003), 365–395.

[Du] E. Dueñez, Random matrix ensembles associated to compact symmetric spaces, Commun. Math. Phys. **244** (2004), 29–61.

[Dy] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems. I, J. Mathematical Phys. **3** (1962), 140–156.

[FG] P. J. Forrester and A. Gamburd, Counting formulas associated with some random matrix averages, J. Combi. Theory, Ser. A **113** (2006), 934–951.

[KS1] J. P. Keating and N. C. Snaith, Random matrix theory and $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, Commun. Math. Phys. **214** (2000), 57–89.

[KS2] —–, Random matrix theory and L-functions at $s = 1/2$, Comm. Math. Phys. **214** (2000), 91–110.

[KO] 小林・大島, "Lie 群と Lie 環 1"; 小林, "Lie 群と Lie 環 2", 岩波講座 現代数学の基礎 12・13, 岩波書店, 1999.

[Mac] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials", second ed., Oxford University Press, Oxford, 1995.

[Mat1] S. Matsumoto, Two-parameter circular ensembles and Macdonald polynomials, math.PR/0608751.

[Mat2] ——, Hyperdeterminants and hyperpfaffians: applications to Schur and Jack functions, 博士論文 九州大学 (2007).

[Me] M. L. Mehta, "Random Matrices", 3rd ed., Academic Press, 2004.

[O] 岡田, 古典群の表現論と組合せ論　上・下, 数理物理シリーズ 3,4, 培風館, 2006.

松本 詔（Sho MATSUMOTO）
九州大学大学院数理学研究院　　日本学術振興会特別研究員ＰＤ（平成 19 年４月現在）
shom@math.kyushu-u.ac.jp