対称関数論からのランダム行列入門

松本 詔[1]（九州大学大学院数理学府）

対称関数論のランダム行列理論への応用について述べる．次のような問題を考える．$\mathcal{M}$ を行列のなす空間で，$\mathrm{d}M$ という確率測度を備えているとする: $\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}M = 1$．このとき，固有多項式 $\det(I+xM)$ のモーメントを計算したい．

$$\langle \det(I+xM)^{\gamma} \rangle_{\mathcal{M}} := \int_{\mathcal{M}} \det(I+xM)^{\gamma} \mathrm{d}M.$$

ここでは $\mathcal{M}$ として次のようなものを考える．
(i) ユニタリ群 $U(N)$,　(ii) シンプレクティック群 $Sp(2N)$,　(iii)（特殊）直交群 $O(N)$, $SO(N)$,
(iv) 円アンサンブル（パラメーター β） CβE．特に，CUE, COE, CSE.

例えば，(i) $\mathcal{M} = U(N)$ のときは，$\mathrm{d}M$ はユニタリ群 $U(N)$ のハール測度を用いる．このときは絶対値のモーメントを見るのだが,

$$\left\langle |\det(I+xM)|^{k} \right\rangle_{U(N)} = s_{(N^k)}(\underbrace{1,\dots,1}_{2k}) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{j!\,(j+2k)!}{\{(j+k)!\}^2}$$

となる．ここで，$s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ は分割 λ に対応するシューア多項式である．

同様のことが他の場合にも言えて，(ii)，(iii) の場合はシューア関数（A 型）の B,C,D 型の類似（すなわち，群 $Sp(2N)$, $O(N)$, $SO(N)$ の既約指標）を用いて記述される（[BG]）.

(iv) の場合は，ジャック多項式 $P_\lambda^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_n)$ がパラメーター $\alpha = 2/\beta$ という対応で現れる．さらに，(iv) の q 類似を考えることができて，その場合はマクドナルド多項式が対応する（[M]）.

講演者の結果 [M] について述べるのは最小限に止め，ここではできるだけ入門編として話していきたい．

参考文献

[BG] D. Bump and A. Gamburd, On the averages of characteristic polynomials from classical groups, Commun. Math. Phys. **265** (2006), 227-274.

[M] S. Matsumoto, Two-parameter circular ensembles and Macdonald polynomials, math.PR/0608751.

[1]shom@math.kyushu-u.ac.jp