ジョルダン代数をグライス代数にもつ頂点作用素代数の単純性

新堀 秀和 (Hidekazu Niibori)

筑波大学大学院数理物質科学研究科

Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba

(e-mail: niibori@math.tsukuba.ac.jp)

1 はじめに

今回の講演では，佐垣大輔先生（筑波大）との共同研究で行った，ジョルダン代数をグライス代数にもつ頂点作用素の単純性について話をさせて頂いた．

無限個の積を持つ頂点作用素代数 $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ が $\dim V_0 = 1$，$V_1 = \{0\}$ を満たすとき，ウエイト 2 の空間 V_2 は，1-積と呼ばれる積 $u_1 v$ $(u, v \in V_2)$ により，通常，非結合的な可換代数（グライス代数 (Griess algebra) と呼ばれる）となる．C.H.Lam は [Lam2] において，任意の自然数 d に対して，グライス代数が d 次対称行列全体のなすジョルダン代数 J_d と同型になる頂点作用素代数を構成した．この頂点作用素代数はフリーボゾン型頂点作用素代数の部分代数として構成され，その中心電荷 (central charge) は d となっている．

Ashihara-Miyamoto はこの方法を拡張し，任意の複素数 c と自然数 d に対して，中心電荷が c で，グライス代数が J_d と同型な頂点作用素代数の構成に成功した ([AM])．その方法は，d 次元ベクトル空間 $\mathfrak{h}$（可換リー代数とみなす）をアフィン化し，その普遍包絡環の剰余環の次数 2 と定数項の直和空間にある特殊なリー積を定義する．そして，そのヴァーマ加群 M_r を考え，その部分空間として構成したものである．ここで，r は任意の複素数である．（実際，Ashihara-Miyamoto による頂点作用素代数の中心電荷は dr である．）本稿では，この頂点作用素代数の単純性について述べる．

記号・記法. $\mathbb{C}$ を複素数の集合，$\mathbb{Z}$ を有理整数の集合とし，$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}$，$\mathbb{Z}_{>0} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ とする．また，本稿を通して，変数は形式的かつ互いに可換であり，ベクトル空間はすべて $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．V をベクトル空間とし，z を形式的変数とする．このとき，

$$V[[z]] := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} v_i z^i \;\middle|\; v_i \in V \right\},$$

$$V[[z, z^{-1}]] := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} v_i z^i \;\middle|\; v_i \in V \right\},$$

$$V((z)) := \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} v_i z^i \;\middle|\; v_i \in V,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

とする．

2　頂点作用素代数

この節では，頂点作用素代数の公理を述べる．詳細は，[FHL]，[LL] を参照して欲しい．

定義 2.1．頂点作用素代数 (vertex operator algebra) $(V, Y(\cdot, z), \mathbf{1}, \omega)$ とは，$\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded ベクトル空間 $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n$ で

$$\dim V_n < \infty \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

を満たし，さらに線形写像

$$\begin{aligned} Y(\cdot, z) : V &\to (\operatorname{End} V)[[z, z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y(v, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m z^{-m-1} \end{aligned}$$

と 2 つの特別な元 $\mathbf{1} \in V_0$（**真空元** (vacuum element)），$\omega \in V_2$（**ヴィラソロ元** (Virasoro element)）をもち，次を満たすものである：

V1. (truncation condition)

$$u, v \in V \text{ に対して，} Y(u, z)v \in V((z)).$$

V2. (vacuum property)

$$Y(\mathbf{1}, z) = \mathrm{Id}_V .$$

V3. (creation property)

$$Y(v, z)\mathbf{1} \in V[[z]], \qquad \lim_{z \to 0} Y(v, z)\mathbf{1} = v.$$

V4. (Jacobi identity)　$u, v \in V$ に対して，

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u, z_1)Y(v, z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v, z_2)Y(u, z_1) = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(u, z_0)v, z_2).$$

V5. (Virasoro algebra relation)　$Y(\omega, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} L(m) z^{-m-2}$ とおくとき，$m, n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$[L(m),\ L(n)] = (m - n)L(m + n) + \frac{(m^3 - m)}{12} \delta_{m+n,0} c_V \,\mathrm{Id}_V$$

を満たす．ここで，$c_V \in \mathbb{C}$ は定数で，V の**中心電荷** (central charge)，または**階数** (rank) と呼ばれる．

V6. ($L(0)$-eigenspace decomposition)

$$v \in V_n \text{ に対して，} L(0)v = nv.$$

このとき，$n \in \mathbb{Z}$ を v の**ウエイト** (weight) と呼び，$n = \mathrm{wt}\, v$ と表す．さらに，$v \in V_n$ であるとき，v を **homogeneous な元**と呼ぶ.

V7. ($L(-1)$-derivative property)

$$v \in V \text{ に対して，} Y(L(-1)v, z) = \frac{d}{dz} Y(v, z).$$

頂点作用素代数においても，一般的な代数と同様に，イデアルの概念が定義される．

定義 2.2. 頂点作用素代数 $(V, Y(\cdot, z), \mathbf{1}, \omega)$ の**イデアル** (ideal) I とは，V の部分空間で，任意の $v \in V$ に対して，$Y(v, z)U \subset U((z))$ を満たすものである．頂点作用素代数 $V \neq \{0\}$ が**単純** (simple) と呼ばれるのは，V のイデアルが V と $\{0\}$ のみのときである．

3 ジョルダン代数

定義 3.1. $\mathbb{C}$ 上の代数 J が**ジョルダン代数** (Jordan algebra) と呼ばれるのは，次を満たす乗法 $a \cdot b$ $(a, b \in J)$ をもつときである：

$$a \cdot b = b \cdot a,$$
$$a^2 \cdot (b \cdot a) = (a^2 \cdot b) \cdot a.$$

d 次対称行列全体 $\mathrm{Sym}_d(\mathbb{C})$ は，ジョルダン積 $a \cdot b$ を

$$a \cdot b := \frac{1}{2}(ab + ba)$$

で定義することにより（単純な）ジョルダン代数となる ([Alb])．以下，このジョルダン代数を J_d と表す．本稿で紹介するグライス代数がジョルダン代数に同型な頂点作用素代数において，ジョルダン代数は J_d のことである．

4 グライス代数

この節では，グライス代数の概略を述べる．この節で紹介する事実，および証明は [FLM], [Lam1]，[Lam2] を参照して欲しい．以下，$(V, Y(\cdot, z), \mathbf{1}, \omega)$ を頂点作用素代数とする．

補題 4.1. 頂点作用素代数 V が $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$，$V_1 = \{0\}$ を満たすとき，ウエイト 2 の空間 V_2 は 1-積により，（通常，非結合的な）可換代数となる．つまり，

$$ab := a_1 b \qquad (a, b \in V_2)$$

により，V_2 は可換代数となる．

上の補題を用いて，グライス代数の定義を述べよう．

定義 4.2. 頂点作用素代数 V が $\dim V_0 = 1$（つまり，$V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$），$V_1 = \{0\}$ を満たすとき，ウエイト 2 の空間 V_2 は，1-積 $u_1 v$ $(u, v \in V_2)$ により，通常，非結合的な可換代数となる．これを**グライス代数** (Griess algebra) と呼ぶ．

5 グライス代数がジョルダン代数に同型な頂点作用素代数

$\mathfrak{h}$ を非退化な正定値双線型形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ をもつ d 次元ベクトル空間とし，$\{v^1, v^2, \cdots, v^d\}$ をその正規直交基底とする．さらに $\mathfrak{h}$ を可換リー代数とみなし，そのアフィン化を

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes [t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{c},\\
&[at^m, bt^n] = \delta_{m+n,0} m\langle a, b\rangle \boldsymbol{c}, \qquad (a, b \in \mathfrak{h},\ m, n \in \mathbb{Z})\\
&[\boldsymbol{c}, \hat{\mathfrak{h}}] = 0
\end{aligned}$$

で定義する．リー代数 $\hat{\mathfrak{h}}$ の普遍包絡環を $U(\hat{\mathfrak{h}})$ で表し，$\boldsymbol{c} - 1$ で生成される $U(\hat{\mathfrak{h}})$ の両側イデアル $(\boldsymbol{c} - 1)$ による剰余環 $U(\hat{\mathfrak{h}})/(\boldsymbol{c} - 1)$ を考える．このとき，ベクトル空間として

$$U(\hat{\mathfrak{h}})/(\boldsymbol{c} - 1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathfrak{h} \otimes [t, t^{-1}] \oplus S^2(\mathfrak{h} \otimes [t, t^{-1}]) \oplus \cdots$$

である．ただし，$S^n(H \otimes [t, t^{-1}])$ は $H \otimes [t, t^{-1}]$ の n 次の対称テンソルのなす空間である．さて，この剰余環はリー積 $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ によりリー代数であり，

$$\mathcal{L} = S^2(\mathfrak{h} \otimes [t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}$$

はその部分リー代数である．

$\pi_1 : \mathcal{L} \twoheadrightarrow S^2(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}])$ と $\pi_2 : \mathcal{L} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ を，それぞれ $\mathcal{L}$ から $S^2(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}])$ と $\mathbb{C}$ への射影とする．任意の $r \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{L}$ 上に新しい積 $[\cdot,\cdot]_r$ を

$$[\alpha, \beta]_r = \pi_1([\alpha, \beta]_r) + r\pi_2([\alpha, \beta]_r) \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{L}) \tag{5.1}$$

により導入する．このとき，$\mathcal{L}$ は (5.1) よりリー代数となる．このリー代数を $\mathcal{L}_r$ と表すことにする．

さて，Poincarë-Birkhoff-Witt の定理より，$1 \leq i, j \leq d$，$m, n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$v^{ij}(m, n) = \begin{cases}
(v^i \otimes t^m)(v^i \otimes t^n) & i = j,\ m \leq n,\\
(v^i \otimes t^n)(v^i \otimes t^m) & i = j,\ m > n,\\
(v^i \otimes t^m)(v^j \otimes t^n) & i < j,\\
(v^j \otimes t^n)(v^i \otimes t^m) & i > j.
\end{cases}$$

とおくと，

$$\left\{v^{ij}(m,n) \;\middle|\; 1 \leq i,j \leq d,\ m,n \in \mathbb{Z}\right\}$$

は $S^2(\mathfrak{h} \otimes [t,t^{-1}])$ の基底となる．

$\mathcal{L}$ において，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+ &:= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{v^{ij}(m,n) \mid m \leq 0 \text{ または } n \leq 0,\ 1 \leq i,j \leq d\right\} \oplus \mathbb{C},\\ \mathcal{L}^- &:= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{v^{ij}(m,n) \mid m < 0, n < 0,\ 1 \leq i,j \leq d\right\}\end{aligned}$$

とおく．そして，1 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}\mathbf{1}$ 上に $U(\mathcal{L}^+)$ の作用を

$$\begin{aligned}&m \geq 0 \text{ または } n \geq 0 \text{ のとき，} v^{ij}(m,n)\mathbf{1} = 0,\\ &\mathbb{C} \text{ は定数倍で作用する}\end{aligned}$$

により定義し，さらに $U(\mathcal{L})$ のヴァーマ加群 M_r を

$$M_r := U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L}^+)} \mathbb{C}\mathbf{1}$$

で定義する．このとき，ベクトル空間として

$$M_r \cong U(\mathcal{L}^-)\mathbf{1}$$

であり，M_r は

$$\mathbb{B} = \left\{v^{i_1 j_1}(-m_1,-n_1)v^{i_2 j_2}(-m_2,-n_2)\cdots v^{i_k j_k}(-m_k,-n_k)\mathbf{1} \;\middle|\; \begin{array}{c} k \geq 0,\ 1 \leq i_l \leq j_l \leq d, \\ m_l, n_l \in \mathbb{Z}_{>0},\ 1 \leq l \leq k \end{array}\right\}$$

によって張られる．$\mathbb{B}$ の元 $v^{i_1 j_1}(-m_1,-n_1)v^{i_2 j_2}(-m_2,-n_2)\cdots v^{i_k j_k}(-m_k,-n_k)\mathbf{1}$ に対して，

$$\deg(v^{i_1 j_1}(-m_1,-n_1)v^{i_2 j_2}(-m_2,-n_2)\cdots v^{i_k j_k}(-m_k,-n_k)\mathbf{1}) := \sum_{s=1}^{k}(m_s + n_s),$$

$$(M_r)_n := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{v \in \mathbb{B} \mid \deg v = n\right\}$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}M_r &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (M_r)_n,\\ (M_r)_0 &= \mathbb{C}\mathbf{1}, \quad (M_r)_1 = \{0\}\end{aligned}$$

である．

次に，$L_r^{ij}(m) \in \mathrm{End}(M_r)$ $(1 \leq i,j \leq d,\ m \in \mathbb{Z})$ を

$$L_r^{ij}(m) := \frac{1}{2}\sum_{h \in \mathbb{Z}} v^{ij}(m-h,h)$$

によって定義し，

$$\omega_r^{ij} := L_r^{ij}(-2)\mathbf{1} \in (M_r)_2, \qquad \omega := \sum_{i=1}^{d} \omega_r^{ii} \in (M_r)_2$$

とおく．さらに，$\mathcal{J} := \left\{\omega_r^{ij},\ \mathbf{1} \mid 1 \le i \le j \le d\right\} \subset M_r$ とし，M_r の部分空間 $V_{\mathcal{J}}$ を

$$V_{\mathcal{J}} := \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ L_r^{i_1 j_1}(m_1) L_r^{i_2 j_2}(m_2) \cdots L_r^{i_k j_k}(m_k)\mathbf{1} \;\middle|\; \begin{array}{c} k \ge 0,\ 1 \le i_l \le j_l \le d, \\ m_l \in \mathbb{Z},\ 1 \le l \le k \end{array} \right\} \subset M_r$$

とする．このとき，$n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して，$(V_{\mathcal{J}})_n := V_{\mathcal{J}} \cap (M_r)_n$ とすると，$V_{\mathcal{J}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}} (V_{\mathcal{J}})_n$ となる．

[AM] において，Ashihara-Miyamoto は $V_{\mathcal{J}}$ に頂点作用素代数の構造が入り，ω をヴィラソロ元，$\mathbf{1}$ を真空元，中心電荷 dr をもつことを示した．さらに，$(V_{\mathcal{J}})_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$，$(V_{\mathcal{J}})_1 = \{0\}$ となり，そのグライス代数 $(V_{\mathcal{J}})_2$ がジョルダン代数 J_d と同型になることを示した．

注意として，$d = 1$ のとき，$V_{\mathcal{J}}$ はヴィラソロ頂点作用素代数となる．本稿の目的は，頂点作用素代数 $V_{\mathcal{J}}$ の単純性を判定することであるが，ヴィラソロ頂点作用素代数についてはすで知られているので ([W])，我々は，$d \ge 2$ の場合を考える．以下，本稿を通して，$d \ge 2$，r は任意の複素数とする．

6 $V_{\mathcal{J}}$ の単純性

$V_{\mathcal{J}}$ は M_r の部分空間として，定義されているが，$d \ge 2$ のときは次が成り立つ．

補題 6.1. 頂点作用素代数 $V_{\mathcal{J}}(\subset M_r)$ は M_r に一致する．

注意として，$d = 1$ のときは $V_{\mathcal{J}} \subsetneq M_r$ である．この補題により我々は次を得ることができる．

命題 6.2. 頂点作用素代数 $V_{\mathcal{J}}$ が単純となる必要十分条件は，$V_{\mathcal{J}}(= M_r)$ が既約な $\mathcal{L}_r$ 加群となることである．

よって，我々は $V_{\mathcal{J}}$ の単純性を判定するために，$V_{\mathcal{J}}(= M_r)$ の既約性を判定することを目標とする．しかし，$V_{\mathcal{J}}$ の既約性は $V_{\mathcal{J}}$ のある部分空間 $(M_r^{(1)})$ の既約性と同値であることがわかる．

$\mathcal{L}_r^{(1)}$ を $v^{11}(m,n)$ $(m,n \in \mathbb{Z})$ で生成される $\mathcal{L}_r$ の部分リー代数とし，

$$M_r^{(1)} = U(\mathcal{L}_r^{(1)})\mathbf{1} \subset M_r$$

とする．このとき，次を得る．

命題 6.3. M_r が既約な $\mathcal{L}_r$ 加群となる必要十分条件は，$M_r^{(1)}$ が既約な $\mathcal{L}_r^{(1)}$ 加群となることである．

よって，$M_r^{(1)}$ の既約性を判定するのだが，次を得ることができる．

命題 6.4. $r \in \mathbb{C}\backslash(\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup 2\mathbb{Z}_{\leq 0})$ であるとき，$M_r^{(1)}$ は既約な $\mathcal{L}_r^{(1)}$ 加群である．

次に，$M_r^{(1)}$ がいつ可約になるかを調べたいのだが，それは，次の補題により得ることができる．

補題 6.5. (1) $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし，$p := r+1$ とおく．このとき，

$$a_p = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) v^{11}(-p, -\sigma(p)) v^{11}(-p+1, -\sigma(p-1)) \cdots v^{11}(-1, -\sigma(1)) \mathbf{1}$$

は $M_r^{(1)}$ の特異ベクトルとなる．ここで，$\mathcal{S}_p$ は p 次対称群，$\varepsilon(\sigma)$ は置換 $\sigma \in \mathcal{S}_p$ の符号である．

(2) $r \in 2\mathbb{Z}_{\leq 0}$ とし，$p := -r/2+1$ とおく．このとき，

$$b_p := \underbrace{v^{11}(-1,-1) \cdots v^{11}(-1,-1)}_{p \text{ times}} \mathbf{1}$$

は $M_r^{(1)}$ の特異ベクトルとなる．

この補題により，我々は次を得る．

命題 6.6. $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup 2\mathbb{Z}_{\leq 0}$ であるとき，$M_r^{(1)}$ は可約な $\mathcal{L}_r^{(1)}$ 加群である．

上の命題 6.3 $\sim$ 6.6 より，

$$\begin{aligned} M_r : \text{既約な } \mathcal{L}_r \text{ 加群} &\iff M_r^{(1)} : \text{既約な } \mathcal{L}_r^{(1)} \text{ 加群} \\ &\iff r \in \mathbb{C}\backslash(\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup 2\mathbb{Z}_{\leq 0}) \end{aligned}$$

が得られる．よって，命題 6.2 より，次を得る．

定理 6.7. 頂点作用素代数 $V_{\mathcal{J}}$ が単純である必要十分条件は，$r \in \mathbb{C}\backslash(\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup 2\mathbb{Z}_{\leq 0})$ である．

参考文献

[Alb] A.A.Albert, A structure theory for Jordan algebras, *Ann. of Math.* (2) **48**, (1947), 546–567.

[AM] T. Ashihara and M. Miyamoto, Deformation of central charges, vertex operator algebras whose Griess algebras are Jordan algebras, *preprint.*

[B] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068-3071.

[FHL] I.B.Frenkel, Y.Huang, and J.Lepowsky, "On Axiomatic Approaches to Vertex Operator Algebras and Modules", *Mem. Amer. Math. Soc.* Vol.**104** (1993), No.494.

[FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", *Pure and Appl. Math.*, Vol.**134**, Academic Press, 1988.

[FZ] I. B. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123-168.

[Lam1] C.H.Lam, Construction of vertex operator algebras from commutative associative algebras, *Comm. Algebra* **24** (1996), 4339-4360.

[Lam2] C. H. Lam, On VOA associated with special Jordan algebra. *Comm. Algebra* **27** (1999), 1665-1681.

[LL] J. Lepowsky and H. Li, "Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations", *Progress in Mathematics*, Vol.**227**, Birkhäuser, 2004.

[Li] H. Li, Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules, *J. Pure Appl. Algebra* **109** (1996), 143-195.

[W] W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras, *Internat. Math. Res. Notices* 1993, no.7, 197–211.