ヒルベルト関数を固定した時の斉次イデアルの depth について

村井　聡*

Introduction

本稿の内容は日比孝之教授 (大阪大学) との共同研究に基づくものである．$S = K[x_1, \ldots, x_n]$ を体 K 上の標準的な次数付けを持つ n 変数多項式環とし, I を S の斉次イデアルとする.（本稿では全ての斉次イデアルは自明でないことを仮定する.）商環 S/I の**ヒルベルト関数** $H(S/I) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ とは

$$H(S/I)(t) = \dim_K (S/I)_t$$

で定義される関数のことある．但し, $(S/I)_t$ は商環 S/I の t 次斉次成分とする．本稿ではヒルベルト関数を固定した時, 商環 S/I の depth がどの程度の範囲の値を取りうるかについて解説する.

関数 $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し,

$$A_H = \{\mathrm{depth}(S/I) : I \text{ は } H(S/I) = H \text{ を満たす } S \text{ の斉次イデアル}\}$$

と定める．ここで考えるのは, 関数 H からどのように A_H を決定するか？という問題である．先ず考えられるのは, A_H の最小値と最大値をどう決定するか？という問題であるが, 最大値については Macaulay の古典的な結果から, また, 最小値については Bigatti, Hullet 及び Pardue らによる最近の結果から比較的容易に決定できる．我々が得た主結果は以下のものである.

Theorem 0.1. 関数 $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が S をある斉次イデアル I で割った環 S/I のヒルベルト関数であるとする．この時, ある整数 $0 \leq a \leq b \leq n$ があり

$$A_H = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$$

となる．さらに, もし $\min A_H > 0$ なら, ある整数 $0 < a \leq n$ があり $A_H = \{a\}$ となる.

*大阪大学大学院 情報科学研究科 情報基礎数学専攻 豊中市待兼山 1 番 1 号 560-0043.
The author is supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

上の定理は A_H の最小値と最大値がわかれば A_H 全体を知ることができるということを意味している. 先に述べたように最小値と最大値は決定できるので, 結果として集合 A_H は完全に求めることが出来る.

本稿の構成は次の通り. 第 1 節で depth 及びヒルベルト関数に関する基本的な事項を導入する. 第 2 節, 第 3 節では A_H の最大値及び最小値がどのように決定するかについて紹介する. 第 4 節では, 主結果の証明に深い関わりのある universal lexsegment イデアルについて簡単に解説し, 第 5 節に於いて Theorem 0.1 の証明を与える.

1 Depth とヒルベルト関数について

この節では depth とヒルベルト関数に関する必要な知識を導入する.

Definition 1.1. M を次数付 S-加群とする. 斉次多項式の列 $u_1, \ldots, u_r \in S$ が **M-regular** であるとは, (i) 各 i に対し u_i が $M/(u_1, \ldots, u_{i-1})M$ の非零因子であり, かつ (ii) $M/(u_1, \ldots, u_r)M \neq 0$ を満たす時に言う. また, M の **depth** とは M-regular な斉次多項式の列 $u_1, \ldots, u_r$ の最大の長さ r のことで, M の depth を $\mathrm{depth}(M)$ と書くことにする.

depth に関するより詳しい事項に関しては [3, §1] 等を参照して頂きたい. ここでは次の二つの事実についてだけ言及しておくことにする.

Lemma 1.2. $I \subset S$ を斉次イデアルとする.

(i) 基礎体 K が無限体で $\mathrm{depth}(S/I) = r$ なら, S/I-regular であるような linear form $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r \in S_1$ が存在する.

(ii) (Auslander–Buchsbaum) $\mathrm{depth}(S/I) = n - \mathrm{proj\ dim}(S/I)$.

但し, $\mathrm{proj\ dim}(S/I)$ は S/I の射影次元とする. 次にヒルベルト関数と lexsegment イデアルに関する Macaulay の結果について紹介しておく.

Definition 1.3. 多項式環 S 上の**辞書式順序**$<_{\mathrm{lex}}$ とは次で定義される S の単項式全体の集合の上の全順序である.

$$\begin{aligned} & x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} >_{\mathrm{lex}} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \\ & \quad \Leftrightarrow \text{ベクトル } (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n) \text{ の最も左にある } 0 \text{ でない成分が正.} \end{aligned}$$

単項式イデアル I が **lexsegment** であるとは, ある単項式 u が I に属しているなら $v >_{\mathrm{lex}} u$ かつ $\deg v = \deg u$ なる任意の単項式 v が I に属している時に言う.

定義から, $I \subset S$ と $J \subset S$ がともに lexsegment イデアルで, かつ I と J が同じヒルベルト関数を持つなら $I = J$ であることは容易に導かれる. lexsegment イデアルについて次のことが知られている.

Lemma 1.4 (Macaulay)**.** 任意の斉次イデアル I に対し, $H(S/I) = H(S/\mathrm{Lex}(I))$ となる lexsegment イデアル $\mathrm{Lex}(I) \subset S$ が一意的に存在する.

定義の際に述べたように, lexsegment イデアルというのはヒルベルト関数から一意的に決定するものであるから, 上の Macaulay の結果は本質的には斉次イデアルのヒルベルト関数を特徴付けるものである. 実際, どのような関数が多項式環 S を斉次イデアル I で割った商環 S/I のヒルベルト関数となりうるかについては, 二項係数を使った具体的な特徴づけも与えられている. 詳しくは [3, §4.2] 等を見よ.

Definition 1.5. $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を関数とする. ある整数 m と斉次イデアル $I \subset K[x_1, \ldots, x_m]$ があり, $H = H(K[x_1, \ldots, x_m]/I)$ 又は $H = H(K[x_1, \ldots, x_m])$ となる時, H は***O*-sequence** であると言う.

2 Depth の最大値

この節では, A_H の最大値は O-sequence を使って決定できることを紹介する.

Definition 2.1. 関数 $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し, 別の関数 $\Delta(H) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を

$$\Delta(H)(t) = H(t) - H(t-1)$$

で定める. 但し $H(-1) = 0$ とする. また, 整数 $p > 1$ に対し, 関数 $\Delta^p(H) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $\Delta^p(H) = \Delta(\Delta^{p-1}(H))$ で帰納的に定義する. A_H の最大値は次のように決定する.

Proposition 2.2. 関数 $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が S をある斉次イデアル I で割った環 S/I のヒルベルト関数であるとする.

$$\max A_H = \max\{p : \Delta^p(H) \text{ が } O\text{-sequence}\}.$$

上の主張を証明するために, 簡単な補題を一つ用意する.

Lemma 2.3. $I \subset S$ を斉次イデアルとし, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \in S_1$ を S/I の regular sequence とする.

$$H(S/(I + \langle \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \rangle)) = \Delta^r(H(S/I)).$$

Proof. $r = 1$ の時に示せば十分である. $M = S/I$ とおくと, $H(S/(I + \langle \vartheta_1 \rangle)) = H(M/\vartheta_1 M)$ である. 他方, ϑ_1 は $M = S/I$ の非零因子なので, $H(\vartheta_1 M)(t) = H(M)(t-1)$ である. すると,

$$\begin{aligned} H(S/(I + \langle \vartheta_1 \rangle))(t) &= H(M)(t) - H(\vartheta_1 M)(t) \\ &= H(M)(t) - H(M)(t-1) = \Delta(H(S/I))(t) \end{aligned}$$

を得る. □

では Proposition 2.1 の証明に移ろう.

Proof of Proposition 2.1. 先ず右辺が左辺より大きいことを示す. $\max A_H = r$ とすると, $\operatorname{depth}(S/I) = r$ かつ $H(S/I) = H$ を満たすような斉次イデアル $I \subset S$ が存在する. Lemma 1.2 と 2.3 より, ある regular sequence $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \in S_1$ があり,

$$H(S/I + \langle \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \rangle) = \Delta^r(H(S/I)) \tag{1}$$

となる. 他方 $S/\langle \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \rangle$ は $K[x_1, \ldots, x_{n-r}]$ に同型なので, 多項式環 $K[x_1, \ldots, x_{n-r}]$ の斉次イデアル J で $H(S/(I + \langle \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \rangle)) = H(K[x_1, \ldots, x_{n-r}]/J)$ となるものが存在するはずである. このことと式 (1) と合わせると $\Delta^r(H(S/I))$ が O-sequence であることがわかる.

次に左辺が右辺より大きいことを示す. $s = \max\{p : \Delta^p(H)$ が M-vector$\}$ とする. ある斉次イデアル $I \subset S$ があり, $\operatorname{depth}(S/I) = s$ かつ $H(S/I) = H$ を示せばよい. $H(0) = 1$ かつ $H(1) \leq n$ なので $\Delta^s(H)(1) \leq n - s$ である. すると, 仮定より多項式環 $K[x_1, \ldots, x_{n-s}]$ の斉次イデアル J で $H(K[x_1, \ldots, x_{n-s}]/J) = \Delta^s(H)$ となるものが存在する. 多項式環 S のイデアル $I = JS$ を考えると, $x_{n-s+1}, \ldots, x_n$ は S/I の regular sequence であるから $\operatorname{depth}(S/I) \geq s$. また,

$$H(K[x_1, \ldots, x_{n-s}]/J) = H(S/I + (x_{n-s+1}, \ldots, x_n)) = \Delta^p(H(S/I))$$

であるから $H(S/I) = H$ となり $s \in A_H$. □

3 Depth の最小値

関数 $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が **critical** であるとは, 在る整数 $1 \leq s \leq n$ と $a_1 \leq \cdots \leq a_s$ があり

$$H(t) = \binom{t+n-1}{n-1} - \sum_{j=1}^{s} \binom{t - a_j + n - j}{n-j} \tag{2}$$

となる時に言う. 集合 A_H の最小値は次のように決定する.

Proposition 3.1. 関数 $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が S をある斉次イデアル I で割った環 S/I のヒルベルト関数であるとする.

(i) H が critical で, (2) の形をしているなら $\min A_H = n - s$.

(ii) H が critical でないなら $\min A_H = 0$.

上の Proposition の証明には universal lexsegment イデアルの概念を導入する必要がある. Universal lexsegment イデアルについての詳しい解説は次の節で行うことにして, ここでは Proposition 3.1 の証明の概略だけを与えることにする. A_H の最小値の決定には次の Bigatti [2], Hullet [5] 及び Pardue [8] らによる結果が非常に有効である.

Lemma 3.2 (Bigatti, Hullet, Pardue)**.** 任意の斉次イデアル $I \subset S$ に対し,

$$\text{proj dim}(S/I) \leq \text{proj dim}(S/\text{Lex}(I)).$$

Remark 3.3. Bigatti, Hullet 及び Pardue の定理は, 実際は $\text{Lex}(I)$ の次数付ベッチ数が I の次数付ベッチより大きいと言う Lemma 3.2 の形よりずっと強い結果である.

第１節で紹介したように, lexsegment イデアルはヒルベルト関数から一意的に決定し, $\text{depth}(S/I) = n - \text{proj dim}(S/I)$ であるから, A_H の最小値は lexsegment イデアルの depth で与えられることがわかる. つまり, $H(S/L) = H$ となるような lexsegment イデアル $L \subset S$ に対し $\text{depth}(S/L)$ が Proposition 3.1 の形で与えられることを示せばよい. この事実は後述の Proposition 4.3, Corollary 4.5 及び 4.6 より従う.

4 Universal lexsegment

この節では [1] で導入された universal lexsegment イデアルについて解説する. 単項式イデアル $I \subset S$ に対し, $G(I)$ を I の単項式からなる極小生成系とする.

Definition 4.1. 多項式環 $K[x_1, \ldots, x_n]$ 上の lexsegment イデアル I が **universal** であるとは, 任意の整数 $m \geq n$ に対して, 単項式の集合 $G(I)$ で生成される $K[x_1, \ldots, x_m]$ 上のイデアルがやはり lexsegment イデアルである時に言う.

Example 4.2. イデアル $I = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ は $K[x_1, x_2]$ のイデアルとしてみるなら, 次数が 2 以上の単項式を全て含むので lexsegment イデアルである. しかし, (x_1^2, x_1x_2, x_2^2) を 3 変数多項式環 $K[x_1, x_2, x_3]$ のイデアルとみるなら, $x_1x_3 >_{\text{lex}} x_2^2$ で $x_1x_3 \notin (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ であるからこのイデアルは $K[x_1, x_2, x_3]$ 上の lexsegment ではない, よって $I \subset K[x_1, x_2]$ は lexsegment ではあるが universal lexsegment ではない. また, universal lexsegment イデアルである例としては例えば $J = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3)$ 等が挙げられる.

実は universal lexsegment イデアルは次のように特徴付けることが出来る. (証明は簡単な組合せ論だけで出来るのでここでは省略する. [7] を参照せよ.)

Proposition 4.3. I を $K[x_1, \ldots, x_n]$ 上の単項式イデアルとする. 次は同値.

(i) I が universal lexsegment;

(ii) I が lexsegment でかつ $|G(I)| \leq n$;

(iii) ある整数 $1 \leq s \leq n$ 及び $b_1, b_2, \ldots, b_s \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$I = (x_1^{b_1+1}, x_1^{b_1}x_2^{b_2+1}, x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3+1}, \ldots, x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_{s-1}^{b_{s-1}}x_s^{b_s+1}). \tag{3}$$

上の結果を使えば, lexsegment イデアルの depth を求めるのは難しくない. 実際 Eliahou–Kervaire [4] の結果を使えば, lexsegment イデアルの depth は次の形で与えられることがわかる.

Lemma 4.4 (Eliahou–Kervaire)**.** 任意の lexsegment イデアル $I \subset S$ に対し,

$$\text{proj dim}(S/I) = \max\{j : x_j \text{がある } I \text{ の生成元 } u \in G(I) \text{ を割り切る }\}.$$

Corollary 4.5. 任意の lexsegment イデアル $I \subset S$ に対し,

$$\text{depth}(S/I) = \min\{0, n - |G(I)|\}.$$

Proof. $|G(I)| \leq n$ とすると, Proposition 4.3 より I は univerasal lexsegment イデアルであり, かつ

$$\max\{j : x_j \text{がある } I \text{ の生成元 } u \in G(I) \text{ を割り切る }\} = |G(I)|$$

であることがわかる. よって Lemma 1.2 (ii) と 4.4 よりこの場合は主張は正しい.

次に $|G(I)| > n$ とすると, $G(J) \subset G(I)$ かつ $|G(J)| = n$ なる lexsegment イデアル $J \subset S$ が取れる. Proposition 4.3 と $G(J) \subset G(I)$ であることから

$$\begin{aligned} n &\geq \max\{j : x_j \text{がある } I \text{ の生成元 } u \in G(I) \text{ を割り切る }\} \\ &\geq \max\{j : x_j \text{がある } J \text{ の生成元 } u \in G(J) \text{ を割り切る }\} \\ &= n. \end{aligned}$$

よって Lemma 1.2 (ii) と 4.4 よりこの場合も主張が正しいことがわかる. □

次に universal lexsegment イデアルのヒルベルト関数がどのような形をしているかを決定しておくことにする.

Corollary 4.6. イデアル I が (3) の形をした universal lexsegment イデアルであるとする. $a_i = \deg x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_{i-1}^{b_{i-1}} x_i^{b_i+1}$ とおくと,

$$H(S/I)(t) = \binom{t+n-1}{n-1} - \sum_{j=1}^{s} \binom{t-a_j+n-j}{n-j} \quad \text{for all } t.$$

特に $H(S/I)$ は critical である.

Proof. 概略のみ与えることにする. I が (3) の形をしている時, I はベクトル空間として次の直和分解を持つ

$$I = \bigoplus_{j=1}^{s} (x_1^{b_1} \cdots x_{j-1}^{b_{j-1}} x_j^{b_j+1}) K[x_j, \ldots, x_n].$$

さて $H(K[x_1, \ldots, x_n])(t) = \binom{t+n-1}{n-1}$ であるから, 上の分解により主張が従う. □

5　主結果の証明

この節では Theorem 0.1 の証明を与える．先ず, $\min A_H > 0$ ならば $|A_H| = 1$ となるという定理の後半の主張は universal lexsegment イデアルについての次の結果から従う．

Proposition 5.1. I を S の斉次イデアルとする．$H(S/I)$ が critical なら $\mathrm{Lex}(I)$ は universal で, かつ

$$\mathrm{depth}(S/I) = \mathrm{depth}(S/\mathrm{Lex}(I)).$$

上の命題において $\mathrm{Lex}(I)$ が universal であることは Proposition 4.3 と Corollary 4.6 より明らかである．$\mathrm{depth}(S/I) = \mathrm{depth}(S/\mathrm{Lex}(I))$ となることの証明は, 少し技巧的であるし, さほど重要な結果ではないのでここでは省略することにする．詳しくは [7] を参照せよ．では Theorem 0.1 の証明に移る．

Proof of Theorem 0.1. Proposition 5.1 より, H は critial でないとしてよい． また Proposition 3.1 より $\min A_H = 0$ であることを注意しておく．$b = \max A_H$ として, $I \subset S$ を $\mathrm{depth}(S/I) = b$ かつ $H(S/I) = H$ となる S の斉次イデアルとする．$b = 0$ なら主張は明らかであるから $b > 0$ として良い．特に Corollary 4.6 より $\mathrm{Lex}(I)$ は universal lexsegment ではない．

さて, $0 < r \leq b$ を整数とし, $r \in A_H$ を示せばよい．Lemma 1.2 (i) より S/I-regular であるような linear form $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \in S_1$ が存在する．特に $R = K[x_1, \ldots, x_{n-r}]$ とおくと, $S/\langle \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \rangle$ と R は同型であるから, ある R の斉次イデアル J で

$$H(R/J) = H(S/(I + \langle \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \rangle)) = \Delta^r(H(S/I))$$

を満たすものが存在する．但し後半の等号は Lemma 2.3 より従う．

R の lexsegment イデアル $\mathrm{Lex}(J)$ をとり, S のイデアル $L = (\mathrm{Lex}(J))S$ を考える．$\mathrm{Lex}(J)$ は R のイデアルであるから, 変数 $x_n, \ldots, x_{n-r+1}$ は L の生成系に現れない．よって $x_n, \ldots, x_{n-r+1}$ は S/L-regular である．すると

$$H(S/(L + \langle x_n, \ldots, x_{n-r+1} \rangle)) = H(R/\mathrm{Lex}(J)) = H(R/J) = H(S/(I + \langle \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r \rangle))$$

であるので $H(S/L) = H(S/I) = H$ がわかる．後は $\mathrm{depth}(S/L) = r$ を示せばよい．

イデアル L の取り方と depth の性質から $\mathrm{depth}(S/L) = r + \mathrm{depth}(R/\mathrm{Lex}(J))$ である．よって $\mathrm{depth}(R/\mathrm{Lex}(J)) = 0$ を示せば十分．ところで, もし $\mathrm{depth}(R/\mathrm{Lex}(J)) > 0$ となるなら Proposition 4.3 と Corollary 4.5 より $\mathrm{Lex}(J)$ は universal lexsegment となる．しかし, もし $\mathrm{Lex}(J)$ が universal lexsegment ならば $L = (\mathrm{Lex}(J))S$ も universal lexsegment であり, L と I とは同じヒルベルト関数を持つので $\mathrm{Lex}(I) = L$ が universal lexsegment となる．初めに述べたように, 仮定から $\mathrm{Lex}(I)$ は universal でないことがわかっているからこれは仮定に矛盾する．よって $\mathrm{depth}(R/\mathrm{Lex}(J)) = 0$ を得る． □

参考文献

[1] E. Babson, I. Novik and R. R. Thomas, Reverse lexicographic and lexicographic shifting, *J. Algebraic Combin.* **23** (2006), 107–123.

[2] A. M. Bigatti, Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert function, *Comm. in Algebra* **21** (1993), 2317–2334.

[3] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen–Macaulay rings," Revised Edition, Cambridge University Press, 1998.

[4] S. Eliahou and M. Kervaire, Minimal resolutions of some monomial ideals, *J. of Algebra* **129** (1990), 1–25.

[5] H. A. Hulett, Maximum Betti numbers for a given Hilbert function, *Comm. in Algebra* **21** (1993), 2335–2350.

[6] F. S. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc.* **26** (1927), 531–555.

[7] S. Murai and T. Hibi, The depth of an ideal with a given Hilbert function, arXive:math.AC/0608188, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[8] K. Pardue, Deformation classes of graded modules and maximal Betti numbers. *Illinois J. Math.* **40** (1995), 564–585.