ヒルベルト関数を固定した時の斉次イデアルの depth について

村井　聡　(大阪大学大学院情報科学研究科)

本研究は日比孝之先生 (大阪大学) との共同研究です. $S = K[x_1, \dots, x_n]$ を体 K 上の標準的な次数付けを持つ n 変数多項式環とします. 以下, 全てのイデアルは S 自身や 0 だけからなる自明なものではないことを仮定します. 多項式環 S の斉次イデアル I に対し, 商環 S/I の**ヒルベルト関数** $H(S/I, t) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ とは

$$H(S/I, t) = \dim_K (S/I)_t$$

で定義される関数のことです. 但し, $(S/I)_t$ は商環 S/I の次数 t の斉次成分とします. 本講演では関数 $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を固定した時, H をヒルベルト関数に持つような商環 S/I の depth がどの程度の範囲の値を取りうるかについてお話しします.

最初に depth の定義を思い出しておきます. ここでは多項式環を斉次イデアルで割った環しか扱わないので, この場合にだけ定義しておくことにします. 一般的な定義は [1, §1] 等を参照して下さい. I を S の斉次イデアルとします. 多項式 $f \in S$ に対し, $[f] \in S/I$ を f の S/I への自然な像とします. 多項式 $f \in S$ が S/I の**非零因子**であるとは、$[fg] = [0]$ となる任意の多項式 $g \in S$ に対し $[g] = 0$ となる時にいいます. 多項式の列 $u_1, u_2, \dots, u_r$ が S/I の **regular sequence** であるとは, 各 $i = 1, 2, \dots, r$ に対して u_i が $S/(I + \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle)$ の非零因子である時に言います. 商環 S/I の **depth** とは S/I の regular sequence の最大の長さのことで, $\mathrm{depth}(S/I)$ と書きます. この depth というのは可換環論における非常に基本的な不変量の一つです.

関数 $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し,

$$A_H = \{\mathrm{depth}(S/I) : I \text{ は } S \text{ の斉次イデアルで } S/I \text{ のヒルベルト関数が } H \text{ に一致}\}$$

と定めます. ここ考えたいのは, 関数 H からどのように A_H を決定するか？という問題です. 先ず考えられるのは, A_H の最大値と最小値をどのように決定するか？という問題でしょう. 詳細はここでは省きますが, 最大値については Macaulay の古典的な結果から簡単に決定することができます. また, 最近の結果から, 最小値というのは lexsegment ideal というイデアルによって与えられることが知られており, こちらも比較的容易に決定できます. 今回, 我々が得た結果は次のようなものです.

定理. 関数 $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が S をある斉次イデアル I で割った環 S/I のヒルベルト関数であるとする. ある整数 $0 \le a \le b \le n$ があり $A_H = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ となる. さらに, もし $\min A_H > 0$ なら, ある整数 $0 < a \le n$ があり $A_H = \{a\}$ となる.

上の定理は A_H の最大値と最小値がわかれば A_H 全体を知ることができるということを意味しています. 今回の講演では, A_H の最大値及び最小値をどのように決定するかについて簡単に解説するとともに, 上の定理の証明のアイデアについてお話ししたいと思います.

References

[1] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen–Macaulay rings", Revised Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

The author is supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.