G 次元が有限なフィルター加群について

宮原 大樹（信州大学大学院総合工学系研究科）

定義 Λがフィルター環であるとは，ここでは次の条件をみたすようなフィルトレーション $\{\, \mathcal{F}_p\Lambda \mid p \in \mathbb{Z},\ \mathcal{F}_p\Lambda$ は Λ の部分加法群 $\}$が存在するような環であるとする：

(1) 任意の $p \in \mathbb{Z}$ に対し，$\mathcal{F}_p\Lambda \subset \mathcal{F}_{p+1}\Lambda$
(2) $p < 0$ のとき，$\mathcal{F}_p\Lambda = 0$
(3) $1 \in \mathcal{F}_0\Lambda$
(4) 任意の $p, q \in \mathbb{Z}$ に対し，$(\mathcal{F}_p\Lambda)(\mathcal{F}_q\Lambda) \subset \mathcal{F}_{p+q}\Lambda$
(5) $\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_p\Lambda = \Lambda$

このとき，各 p に対し，$\sigma_p : \mathcal{F}_p\Lambda \longrightarrow \mathcal{F}_p\Lambda/\mathcal{F}_{p-1}\Lambda$ を自然な準同型とし，$\mathrm{gr}\Lambda := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_p\Lambda/\mathcal{F}_{p-1}\Lambda$ の積を，

$$\sigma_p(a)\sigma_q(b) = \sigma_{p+q}(ab), \quad a \in \mathcal{F}_p\Lambda, b \in \mathcal{F}_q\Lambda$$

で定めれば，$\mathrm{gr}\Lambda$ は次数環となる．また，フィルター環 Λ 上の加群 M についても同様にフィルター加群を定義し，このとき $\mathrm{gr}M$ は $\mathrm{gr}\Lambda$-加群となる。

定義 Λ を右かつ左ネーター環，M を有限生成左 (右)Λ-加群とする。

(1) M が次をみたすとき M の G 次元は 0 であるとよばれ，G-dim$M = 0$ と表す：
   (i) 自然な準同型 $M \longrightarrow M^{**}$ が，同型である。($M^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda)$)
   (ii) 任意の $k > 0$ に対し，$\mathrm{Ext}^k_\Lambda(M, \Lambda) = 0,\ \mathrm{Ext}^k_{\Lambda^{op}}(M^*, \Lambda) = 0$
   また，$n > 0$ に対し，M の n 番目の syzygy $\Omega^n M$ の G 次元が 0 であるとき，M の G 次元は n 以下であるいい，M の G 次元が n 以下で $n-1$ 以下でないとき，M の G 次元は n であるといって，G-dim$M = n$ と表す。さらに任意の $n > 0$ に対し，$\Omega^n M$ の G 次元が 0 ではないとき，G-dim$M = \infty$ であるとする。

(2) $\min\{\, k \mid \mathrm{Ext}^k_\Lambda(M, \Lambda) \neq 0 \,\}$ は M の grade と呼ばれ，ここでは $j(M)$ で表す。

G 次元が有限である加群については以下のことが知られている。

定理 (Auslander-Bridger の stable module theory 参照)
R を可換なネーター環，M を有限生成 R-加群，G-dim$M < \infty$ とする。このとき $j(\mathrm{Ext}^{j(M)}_R(M, R)) \geq j(M)$ が成り立つ。

定理 (M.Hoshino and K.Nishida)
Λ を左かつ右ネーター環，M を有限生成 Λ-加群，G-dim$M < \infty$ とする。このとき $j(\mathrm{Ext}^{j(M)}_R(M, R)) \leq j(M)$ が成り立つ。

本講演では，フィルター環 Λ に対し $\mathrm{gr}\Lambda$ は可換なネーター環 (このとき，Λ は左かつ右ネーター環となる) であると仮定し，フィルター環上の G 次元が有限な有限生成フィルター加群 M と $\mathrm{gr}M$ の関係について考える。