

# Stability condition の空間について

信州大学 アソシエイト研究員

椎名 貴久

shiina@math.shinshu-u.ac.jp

Ton Bridgeland は、任意の triangulated category  $\mathcal{T}$  から stability condition の空間  $\text{Stab}(\mathcal{T})$  を構成する方法を発見した.  $\text{Stab}(\mathcal{T})$  の元は,

$Z: K(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ , アーベル群の準同型,  $K(-)$  は Grothendieck 群

$\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi) \mid \mathcal{T} \text{ の部分圏}, \phi \in \mathbb{R}\}$

で “ある性質” を満たすものの組  $(Z, \mathcal{P})$  である. [Bra]

今回は,  $A_n$  型のクライン特異点の場合を考える. 具体的に言うと,  $G$  を位数  $n+1$  の巡回群,  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2/G$  を minimal resolution,  $\text{Coh}(X)$  を  $X$  上の coherent sheaf からなる abelian category とし, その bounded derived category  $\mathcal{D}^b(\text{Coh}(X))$  の部分圏

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{D}^b(\text{Coh}(X)) \mid \mathbb{R}f_*(E) = 0\}$$

の stability condition の空間  $\text{Stab}(\mathcal{D})$  である.

$$\mathfrak{h} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum z_i = 0\}$$

$$\mathfrak{h}^{\text{reg}} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathfrak{h} \mid z_i \neq z_j \text{ if } i \neq j\}$$

とした時,  $n+1$  次対称群  $\Sigma_{n+1}$  が座標の入れ替えで  $\mathfrak{h}^{\text{reg}}$  に作用しているが,  $\text{Stab}(\mathcal{D})$  は  $\mathfrak{h}^{\text{reg}}/\Sigma_{n+1}$  の universal covering space となっている事が, Seidel-Thomas, Ishii-Ueda-Uehara 等により証明された. [Brb, ST, IUU]

$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\text{reg}}$  の成分を  $\mathbb{R}$  としたものについて,  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\text{reg}}$  は  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  の hyperplane arrangement  $\{\{z_i = z_j\} \mid i \neq j\}$  の補空間  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} - \bigcup \{z_i = z_j\}$  となっている. Mario Salvetti は, 実ベクトル空間の超平面による “区切り” の組み合わせ論的な情報を使って, 単体複体を構成した. そしてその単体複体が, hyperplane arrangement の補空間を複素化したものの変位レトラクトとなっていることを示した. [Sal]

今回は以上の事をもう少し詳しく説明し, 私が今現在 「できたらいいな」と思っている事をお話したいと思います.

## 参考文献

[Bra] T. Bridgeland, Stability conditions on triangulated categories, math.AG/0212237.

[Brb] T. Bridgeland, Stability conditions and Kleinian singularities, math.AG/0508257.

[IUU] A. Ishii, K. Ueda, and H. Uehara, Stability conditions on  $A_n$ -singularities, math.AG/0609551.

[Sal] M. Salvetti. Topology of the complement of real hyperplanes in  $\mathbb{C}^N$ , Invent. Math., 88(3), 1987, 603–618.

[ST] P. Seidel and R. P. Thomas, Braid group actions on derived categories of coherent sheaves, Duke Math. J. 108 (2001), no. 1, 37–108, math.AG/0001043.