対数的ベクトル場のなす加群の基底を求めるアルゴリズム

沼田泰英*

概要

2 次元ベクトル空間上の原点を通る超平面 (直線) の有限集合を考え, 各超平面に非負整数の重みをつけたものを 2-multiarrangement と呼ぶ. 2-multiarrangement に対し, 対数的ベクトル場と呼ばれるベクトル場たちのなす加群を対応させる. 2 次元ベクトル空間上で考えるとき, その加群は, 重みつき超平面配置の取り方によらず自由であり, その基底は斉次に取れることが知られている. 本稿では, 基底を帰納的に構成するアルゴリズムを与える.

1 Introduction

$\mathbb{K}$ 上の l 次元ベクトル空間を考える. 原点を含むような超平面の finite collection を **a central hyperplane arrangement** と呼ぶ. Central hyperplane arrangement $\mathcal{A}$ と写像 $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の組 $(\mathcal{A}, \mu)$ を **multiarrangement** と呼ぶ. 特に, l 次元空間内で考えていることを強調し, **l-multiarrangement** と呼ぶこともある. (通常, l-multiarrangement は central arrangement $\mathcal{A}$ と写像 $m : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_{>0}$ の組 $(\mathcal{A}, m)$ として定義される. 我々の定義による l-multiarrangement $(\mathcal{A}, \mu)$ が与えられた時, $\mathcal{A}' = \mathrm{supp}(\mu) = \mu^{-1}(\{ 0 \})$, $m = \mu|_{\mathcal{A}'}$ と置くことで, 通常の定義の l-multiarrangement $(\mathcal{A}', m)$ を得る. この方法で二つの定義は同一視できるが, 組合せ論的には 0 を含む方が自然であるように思いそちらの定義を採用した.) V の dual space V^* とし, V 上の多項式関数のなす集合を S と置く. S には自然に次数環の構造が入る. Multiarrangement $(\mathcal{A}, \mu)$ に対して, $D(\mathcal{A}, \mu)$ を次の条件を満たす S の derivation θ がなす集合として定義する:

* 北海道大学; nu@math.sci.hokudai.ac.jp

$\theta(\alpha)$ is in the ideal generated by $\alpha^{\mu(\ker(\alpha))}$ for each $\alpha \in S$ with $\ker(\alpha) \in \mathcal{A}$.

$D(\mathcal{A}, \mu)$ には自然に graded S-module の構造が入る．$D(\mathcal{A}, \mu)$ が自由加群であるとき $(\mathcal{A}, \mu)$ が自由であると言う．自由な multiarrangement $(\mathcal{A}, \mu)$ に対しては, $D(\mathcal{A}, \mu)$ は斉次元からなる基底を持つことが知られている．斉次元からなる基底を考え, 次数たちから成る multiset を作り, これを $(\mathcal{A}, \mu)$ の exponents と呼び $\exp(\mathcal{A}, \mu)$ と書く．Exponents は $(\mathcal{A}, \mu)$ の重要な不変量の内の一つである．

Ziegler[8] により, 2-multiarrangement は常に自由であることが知られている．また Yoshinaga[7] により 3-multiarrangement の自由性が特徴づけを与える定理が示されているが, そこでは 2-multiarrangement の exponents が重要な役割を果たしている．2-multiarrangement については, いくつかの例に関して具体的に基底が与えられており, 従って exponents も解る (See [5, 6] and so on.)

Multiarrangements は非負整数の composition と自然に同一視することが出来, multiarrangements のなす集合には自然に束の構造が入る．$(\mathcal{A}, \mu)$ を $D(\mathcal{A}, \mu)$ に対応させる写像は order-reversing である．本稿では, 2-multiarrangement $(\mathcal{A}, \mu)$ に対する $D(\mathcal{A}, \mu)$ の基底を, $(\mathcal{A}, \mu)$ よりも小さな 2-multiarrangement $(\mathcal{A}, \mu')$ に対する $D(\mathcal{A}, \mu')$ の基底から構成するアルゴリズムを与える．

2 Definition and Notation

$\mathbb{K}$ を体とし, V は $\mathbb{K}$ 上の 2 次元線形空間とする．S を $\mathbb{K}$ 係数多項式環 $\mathbb{K}[x, y]$ とする．今 S は自然な次数付けで次数付き $\mathbb{K}$ 代数の構造 $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S_i$ を持っている (S_i は $\{\, x^j y^{i-j} \,|\, j = 0, \ldots, i \,\}$ を基底とする $\mathbb{K}$ 線形空間である).

ここでは, 原点を通る超平面 (即ち, 原点を通る直線) からなる有限集合 $\mathcal{A}$ の事を **central hyperplane arrangement(超平面配置)** と呼び, central hyperplane arrangement $\mathcal{A}$ と写像 $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の組 $(\mathcal{A}, \mu)$ を **multiarrangement** と呼ぶ．$|\mu| = \sum_H \mu(H)$ と定義する．任意の $H \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(H) \leq \mu'(H)$ となっている時, $(\mathcal{A}, \mu) \subset (\mathcal{A}', \mu')$ と定義する．これによって, central arrangement $\mathcal{A}$ に対して, 集合 $\{\, (\mathcal{A}, \mu) \,|\, \text{multiarrangement} \,\}$ は $(\mathcal{A}, 0)$ を最小元とする, graded poset となる, ただしここで 0 は $0(H) = 0$ なる写像である．$|\mu| + 1 = |\mu'|$ かつ $(\mathcal{A}, \mu) \subset (\mathcal{A}', \mu')$ であるとき, $(\mathcal{A}, \mu) \dot{\subset} (\mathcal{A}', \mu')$ と書くことにする．

Definition 1. Multiarrangement $(\mathcal{A}, \mu)$ に対して, 対数的ベクトル場のなす S-加群

$D(\mathcal{A}, \mu)$ を

$$D(\mathcal{A}, \mu) = \left\{ \theta = f\partial_x + g\partial_y \,\middle|\, \substack{f, g \in S. \\ \theta(\alpha) \in \left(\alpha^{\mu(\ker(\alpha))}\right), (\forall \alpha \in S_1 \setminus \{ 0 \})} \right\}$$

で定義する．ただしここで, ∂_x, ∂_y はそれぞれ x, y の偏微分作用素.

$D(\mathcal{A}, \mu)$ は次数付き S-加群の構造 $D(\mathcal{A}, \mu) = \bigoplus_i D(\mathcal{A}, \mu)_i$ を持つ．ただし $D(\mathcal{A}, \mu)_i = D(\mathcal{A}, \mu) \cap (S_i\partial_x + S_i\partial_y)$.（つまり, ∂_x, ∂_y を 0, x, y を 1 とする weight による degree を考える.）また, 定義より, $(\mathcal{A}', \mu') \subset (\mathcal{A}, \mu)$ ならば, $D(\mathcal{A}, \mu) \subset D(\mathcal{A}', \mu')$ が成立する．今は, 2 次元線形空間内の multiarrangement のみを考えているので, $D(\mathcal{A}, \mu)$ は常に階数 2 の自由加群になり, その基底として斉次な元がとれる事が知られている．本稿の目標は, $D(\mathcal{A}, \mu)$ の斉次基底を帰納的に構成するアルゴリズムを与えることである．斉次基底に関する次の判定法がよく知られている.

Criterion 2 (K. Saito's criterion [4]). $\{ \theta_i \in D(\mathcal{A}, \mu)_{d_i} \mid i = 1, 2 \}$ が S-*linearly independent* であるとき, 次は同値*:*

- $\{ \theta_1, \theta_2 \}$ が $D(\mathcal{A}, \mu)$ の基底である*.*
- $|\mu| = \sum_i d_i$*.*

Example 3. $\mathcal{A} = \{ \ker(x), \ker(y), \ker(x + y) \}$ とする．μ を

$$(\mu(\ker(x)), \mu(\ker(y)), \mu(\ker(x + y))$$

の形で表すことにする.

$\mu = (2, 1, 0)$ の時, $x^2\partial_x, y\partial_y \in D(\mathcal{A}, \mu)$ である．実際, $x\partial_x(x) = x^2 \in (x^2)$ であり $x\partial_x(y) = 0 \in (y^1)$ であるので $x\partial_x(x) \in D(\mathcal{A}, \mu)$. また, $y\partial_y(x) = 0 \in (x^2)$ であり $y\partial_y(y) = y \in (y^1)$ であるので $y\partial_y(x)$ も $D(\mathcal{A}, \mu)$ の元である．また, $\deg(x^2\partial_x) = 2$, $\deg(y\partial_y(x)) = 1$ なので

$$\deg(x^2\partial_x) + \deg(y\partial_y(x)) = 3 = |\mu|$$

であり, $\{ x^2\partial_x, y\partial_y \}$ は $D(\mathcal{A}, \mu)$ の斉次基底であることが解る.

$\mu = (2, 2, 0)$ の時, $x^2\partial_x \in D(\mathcal{A}, \mu)$ ではあるが, $y\partial_y \notin D(\mathcal{A}, \mu)$ である．しかしながら, $y^2\partial_y$ は $D(\mathcal{A}, \mu)$ の元である．また,

$$\deg(x^2\partial_x) + \deg(y^2\partial_y(x)) = 4 = |\mu|$$

であるので, $\{ x^2\partial_x, y^2\partial_y \}$ は $D(\mathcal{A}, \mu)$ の斉次基底であることが解る.

$\mu = (2,2,1)$ の時, $x^2\partial_x, y^2\partial_y \notin D(\mathcal{A},\mu)$ であるが, それらに $x+y$ をかけたもの $(x+y)x^2\partial_x$, $(x+y)y^2\partial_y$ は, どちらも $D(\mathcal{A},\mu)$ の元である. しかしながら

$$\deg((x+y)x^2\partial_x) + \deg((x+y)y^2\partial_y(x)) = 6 > |\mu|$$

であるので $\{\,(x+y)x^2\partial_x, (x+y)y^2\partial_y\,\}$ は $D(\mathcal{A},\mu)$ の斉次基底ではないことが解る. $x^2\partial_x - y^2\partial_y$ を考えると,

$$(x^2\partial_x - y^2\partial_y)(x+y) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

であるので $x+y$ で生成されるイデアルの元であり, また,

$$(x^2\partial_x - y^2\partial_y)(x) = x^2, \qquad (x^2\partial_x - y^2\partial_y)(y) = -y^2$$

も解る. したがって, $x^2\partial_x - y^2\partial_y \in D(\mathcal{A},\mu)$ である. さらに,

$$\deg(x^2\partial_x - y^2\partial_y) = 2$$

であるので,

$$\{\,(x+y)x^2\partial_x, x^2\partial_x - y^2\partial_y\,\}, \qquad \{\,(x+y)y^2\partial_y, x^2\partial_x - y^2\partial_y\,\}$$

はどちらも $D(\mathcal{A},\mu)$ の斉次基底であることが解る. 蛇足ではあるが,

$$(x+y)x^2\partial_x - (x+y)y^2\partial_y \in D(\mathcal{A},\mu)$$

であり,

$$\deg((x+y)x^2\partial_x - (x+y)y^2\partial_y) + \deg(x^2\partial_x - y^2\partial_y) = 5 = |\mu|$$

であるものの, $(x+y)x^2\partial_x - (x+y)y^2\partial_y = (x+y)(x^2\partial_x - y^2\partial_y)$ と $x^2\partial_x - y^2\partial_y$ は S-linearly dependent なので, $\{\,(x+y)x^2\partial_x - (x+y)y^2\partial_y, x^2\partial_x - y^2\partial_y\,\}$ は $D(\mathcal{A},\mu)$ の斉次基底ではない.

3 Main result

ここでは, 斉次基底を構成するアルゴリズムを与える.

まず, $(\mathcal{A},\mu)\dot{\subset}(\mathcal{A},\mu')$ を満たす multiarrangements に対して, $D(\mathcal{A}',\mu)$ の斉次基底から $D(\mathcal{A},\mu)$ の斉次基底を構成するアルゴリズムを与える.

Algorithm 4.

入力　斉次な *derivation* θ_1, θ_2; 1 次多項式 $\alpha = (\alpha_x x + \alpha_y y)$; 非負整数 m.
出力　θ'_1, θ'_2.
手続き

1. もし $\deg(\theta_1) < \deg(\theta_2)$ ならば θ_1 と θ_2 を入れ換える.
2. $g(x, y)$ を多項式 $\frac{\theta_2(\alpha)}{\alpha^m}$ と置く.
3. もし $g(\alpha_y, -\alpha_x) = 0$ ならば, $\theta'_1 = \alpha \cdot \theta_1$, $\theta'_2 = \theta_2$ とし終了.
4. $f(x, y)$ を多項式 $\frac{\theta_1(\alpha)}{\alpha^m}$ と置く.
5. $q(x, y)$ を $\deg(\theta_1) - \deg(\theta_2)$-次の斉次多項式で
$$f(\alpha_y, -\alpha_x) + g(\alpha_y, -\alpha_x)q(\alpha_y, -\alpha_x) = 0.$$
を満たす物とする.
6. $\theta'_1 = \theta_1 + q(x, y) \cdot \theta_2$, $\theta'_2 = \alpha \cdot \theta_2$ とし終了.

Theorem 5 (主結果). $(\mathcal{A}, \mu)$, $(\mathcal{A}, \mu')$ を重み付き超平面配置とし, $|\mu| + 1 = |\mu'|$, $(\mathcal{A}, \mu) \subset (\mathcal{A}, \mu')$ を満たすとする. また, $\alpha \in S_1$ は $\mu(\ker(\alpha)) \neq \mu'(\ker(\alpha))$ を満たしているとする. このとき, θ_1, θ_2 を $D(\mathcal{A}, \mu)$ の斉次基底, $\alpha = \alpha$, $m = \mu(\ker(\alpha))$ を入力として, *Algorithm 4* により得られる θ'_1, θ'_2 は $D(\mathcal{A}, \mu')$ の斉次基底である.

Proof. いま, $\ker(\alpha) \neq H$ では, $\mu(H) = \mu(H)$ であるので, $\ker(\alpha)$ でのみ条件を確かめればよい.

g は斉次多項式なので, $g(\alpha_y, -\alpha_x) = 0$ であることと, $g(x, y)$ が α で生成されるイデアルの元であることが同値. $\frac{\theta_2(\alpha)}{\alpha^m} = g(x, y)$ が α で生成されるイデアルの元であれば, $\theta_2(\alpha) = g(x, y)\alpha^m$ は α^{m+1} で生成されるイデアルの元. すなわち, $\theta_2 \in D(\mathcal{A}, \mu')$ であることが解る. 一方 $\theta_1 \in D(\mathcal{A}, \mu)$ であるので, $\theta_1(\alpha)$ は α^m で生成されるイデアルの元. 従って $\alpha\theta_1(\alpha)$ は α^{m+1} で生成されるイデアルの元であるので, $\alpha\theta_1 \in D(\mathcal{A}, \mu')$. $\deg(\alpha\theta_1) + \deg(\theta_2) = \deg(\theta_1) + \deg(\theta_2) + 1 = |\mu'|$ なので Criterion 2 より $\alpha\theta_1, \theta_2$ は $D(\mathcal{A}, \mu')$ の斉次基底であることがわかる. すなわち, Step 3 での結果は $D(\mathcal{A}, \mu')$ の斉次基底であることがわかる.

次に, $g(\alpha_y, -\alpha_x) \neq 0$ のとき, $q(x, y) = \sum q_i x^i y^{\deg(\theta_1) - \deg(\theta_2) - i}$ と置くと,
$$f(\alpha_y, -\alpha_x) + g(\alpha_y, -\alpha_x)q(\alpha_y, -\alpha_x) = 0$$
は q_i に関する方程式であるが, 必ず解を持つ. 例えば, $\alpha_x \neq 0$ であれば
$$\begin{cases} q_0 = -\frac{f(\alpha_y, -\alpha_x)}{g(\alpha_y, -\alpha_x)(-\alpha_x)^d} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\alpha_y^i}{(-\alpha_x)^i} & (i = 0) \\ q_i = 1 & (i > 0) \end{cases} \tag{1}$$

を解として採用できる．さて，このような $q(x,y)$ に対して，$\theta_1' = \theta_1 + q(x,y)\cdot\theta_2$ と置くと，$\frac{\theta_1'(\alpha)}{\alpha^m} = 0$ となることが確かめられ，$\theta_1' \in D(\mathcal{A}', \mu')$ を得る．先程と同じ議論により，$\theta_2' = \alpha\cdot\theta_2 \in D(\mathcal{A}', \mu')$ ならびに θ_1', θ_2' は $D(\mathcal{A}, \mu')$ の斉次基底であることが言える．すなわち，Step 6 での結果は $D(\mathcal{A}, \mu')$ の斉次基底であることがわかる．

□

Multiarrangement のなす集合は最小元を持つ graded poset であったのでこのアルゴリズムを帰納的に用いて任意の 2-multiarrangement $(\mathcal{A}, \mu)$ に対して $D(\mathcal{A}, \mu)$ の斉次基底が解る．

Algorithm 6.

入力 2-*multiarrangement* $(\mathcal{A}, \mu)$

出力 θ_1', θ_2'.

手続き

1. もし $|\mu| = 0$ ならば $\theta_1' = \partial_x$, $\theta_2' = \partial_y$ とし終了．
2. $\mu(H) \neq 0$ となる $H \in \mathcal{A}$ を一つ固定する．
3. μ' を
$$\mu'(H') = \begin{cases} \mu(H) - 1 & (H = H') \\ \mu(H') & (H \neq H') \end{cases}$$
として定義する．
4. $(\mathcal{A}, \mu')$ を入力として *Algorithm 6* により得られた結果を θ_1, θ_2 と置く．
5. $H = \ker(\alpha)$ となる $\alpha \in S_1$ を求める．
6. $\theta_1, \theta_2, \alpha, \mu'(H)$ を入力として *Algorithm 4* により得られる結果を θ_1', θ_2' として終了．

Theorem 7. *$(\mathcal{A}, \mu)$, 重み付き超平面配置とした時, $(\mathcal{A}, \mu)$ を入力として Algorithm 6 により得られた結果は $D(\mathcal{A}, \mu')$ の斉次基底である．*

Proof. まず，アルゴリズムが停止することについては，$\mu' \dot{\subset} \mu$ であること，すなわち $|\mu'| + 1 = |\mu|$ であることにより示すことが出来る．

$D(\mathcal{A}, \mu')$ の斉次基底であることについては，∂_x, ∂_y は $D(\mathcal{A}, 0)$ の斉次基底であるので，従って，Step 1 では正しいまた Step 4 で得られるものが $D(\mathcal{A}, \mu')$ の斉次基底であれば，Step 6 で得られる結果が $D(\mathcal{A}, \mu')$ の斉次基底であることは，Theorem 5 により解る． □

Algorithm 4 での $q(x,y)$ を, 証明で用いた $q(x,y)$ (式 (1)) を用いることで次のようなアルゴリズムを得ることが出来る.

Algorithm 8.

入力 斉次な *derivation* θ_1, θ_2; 1 次多項式 $\alpha=(\alpha_x x+\alpha_y y)$; 非負整数 m.
出力 θ_1', θ_2'.
手続き

1. もし $\deg(\theta_1)<\deg(\theta_2)$ ならば θ_1 と θ_2 を入れ換える.
2. $g(x,y)$ を多項式 $\frac{\theta_2(\alpha)}{\alpha^m}$ と置く.
3. もし $g(\alpha_y,-\alpha_x)=0$ ならば, $\theta_1'=\alpha\cdot\theta_1$, $\theta_2'=\theta_2$ とし終了.
4. $f(x,y)$ を多項式 $\frac{\theta_1(\alpha)}{\alpha^m}$ と置く.
5. もし $f(\alpha_y,-\alpha_x)=0$ ならば, $\theta_1'=\theta_1$, $\theta_2'=\alpha\cdot\theta_2$ とし終了.
6. $d=\deg(\theta_1)-\deg(\theta_2)$ とする.
7. もし $\alpha_x=0$ ならば $\theta_1'=\theta_1-\frac{f(1,0)}{g(1,0)}x^d\theta_2$, $\theta_2'=y\cdot\theta_2$ とし終了.
8. $q(x,y)$ を
$$\left(-\frac{f(\alpha_y,-\alpha_x)}{g(\alpha_y,-\alpha_x)(-\alpha_x)^d}-\sum_{i=1}^{d}\frac{\alpha_y^i}{(-\alpha_x)^i}\right)y^d+\sum_{i=1}^{d}x^iy^{d-i}$$
とする.
9. $\theta_1'=\theta_1+q(x,y)\cdot\theta_2$, $\theta_2'=\alpha\cdot\theta_2$ とし終了.

Remark 9. この Algorithm 8 を含め, いくつかの multiarrangement に関わる関数を計算機代数システム risa/asir[1] のプログラムとして実装した [2].

参考文献

[1] M. Noro, et al, risa/asir. `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/`

[2] Y. Numata, An implementation of algorithms in this paper, `http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~nu/asir/arr/simple/`

[3] P. Orlick and H. Terao, Arrangements of Hyperpanes. Grundlehren der Math. Wiss. 300, Springer-Verlag, 1992.

[4] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27, 1980, pp. 265–291.

[5] L. Solomon and H. Terao, The double Coxeter arrangement. Comment. Math. Helv. 73, 1998, pp.237–258.

[6] A. Wakamiko, On the Exponents of 2-Multiarrangements, preprint, to appear in Tokyo Journal of Mathematics.

[7] M. Yoshinaga, On the freeness of 3-arrangements. Bull. London Math. Soc. 37, 2005, pp 126–134.

[8] G. Ziegler, Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. Singularities, Contemp. Math., 90, Amer. Math. Soc., 1989, pp. 345–359.