対数的ベクトル場のなす加群の基底を求めるアルゴリズム

沼田泰英*

$\mathbb{K}$ を体とし, V は $\mathbb{K}$ 上の 2 次元線形空間とする. S を $\mathbb{K}$ 係数多項式環 $\mathbb{K}[x,y]$ とする. 今 S は自然な次数付けで次数付き $\mathbb{K}$ 代数の構造 $S=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} S_i$ を持っている (S_i は $\left\{ x^j y^{i-j} \,\middle|\, j=0,\ldots,i \right\}$ を基底とする $\mathbb{K}$ 線形空間である). ここでは, 原点を通る超平面 (即ち, 原点を通る直線) からなる有限集合 $\mathcal{A}$ の事を**超平面配置**と呼び, 超平面配置 $\mathcal{A}$ と写像 $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, その組 $(\mathcal{A},\mu)$ を**重み付き超平面配置**と呼ぶ. 重み付き超平面配置 $(\mathcal{A},\mu)$ に対して, 対数的ベクトル場のなす S-加群 $D(\mathcal{A},\mu)$ を

$$\left\{ \theta = f\partial_x + g\partial_y \,\middle|\, \substack{f,g\in S. \\ \theta(\alpha)\in\left(\alpha^{\mu(\ker(\alpha))}\right),(\forall\alpha\in S_1\setminus\{\,0\,\})} \right\}$$

で定義する. ただしここで, ∂_x, ∂_y はそれぞれ x, y の偏微分作用素. $D(\mathcal{A},\mu)_i$ を $\{\, f(x,y)\partial_x + g(x,y)\partial_y \in D(\mathcal{A},\mu) \,|\, f(x,y), g(x,y) \in S_i \,\}$ と定義すると $D(\mathcal{A},\mu)$ は次数付き S-加群の構造 $D(\mathcal{A},\mu)=\bigoplus_i D(\mathcal{A},\mu)_i$ を持つ. 今は, 2 次元線形空間内の超平面配置のみを考えているので, $D(\mathcal{A},\mu)$ は常に階数 2 の自由加群になり, その基底として斉次な元がとれる事が知られている.

Theorem 1 (主結果). $(\mathcal{A},\mu)$ を重み付き超平面配置とし, $0\neq\alpha\in S_1$ とする. $\mathcal{A}'=\mathcal{A}\cup\ker(\alpha)$ とし, $\mu'(H)$ を

$$\begin{cases} \mu'(\ker(\alpha)) = \mu(\ker(\alpha))+1 & (H=\ker(\alpha)) \\ \mu'(H)=\mu(H) & (H\in\mathcal{A}\setminus\{\,\ker(\alpha)\,\}) \end{cases}$$

で定義する. このとき, $D(\mathcal{A}',\mu')$ の基底 (θ'_1,θ'_2) を, $D(\mathcal{A},\mu)$ の基底 (θ_1,θ_2) から, 構成するアルゴリズムが存在する. また, 任意の重み付き超平面配置 $(\mathcal{A},\mu)$ に対し, このアルゴリズムを帰納的に用いる事で, $D(\mathcal{A},\mu)$ の基底 (θ_1,θ_2) を構成する事が出来る. さらに, このアルゴリズムを risa/asir 上で実装した.

---

* 北海道大学大学院理学研究科数学専攻 D3; `nu@math.sci.hokudai.ac.jp`