Specht イデアルのグレブナー基底

大杉英史

関西学院大学理学部

第 68 回代数学シンポジウム
名古屋大学多元数理科学研究科
2023 年 8 月 30 日

村井聡氏，柳川浩二氏との共同研究に基づく

概要

- M. Haiman and A. Woo, Garnir modules, Springer fibers, and Ellingsrud-Strømme cells on the Hilbert Scheme of points, manuscript.
- H. Ohsugi, S. Murai and K. Yanagawa, A note on the reducedness and Gröbner bases of Specht ideals, *Comm. Algebra* **50** (2022), 5430–5434.
- H. Ohsugi and K. Yanagawa, Gröbner fans of Specht ideals, arXiv:2201.05325

整数の分割

定義 1.1

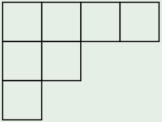
自然数 n の**分割**とは，自然数の非増加列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ で $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = n$ をみたすものをいう。

P_n: n の分割全体

n の分割は**ヤング図形**で表すことができる。

例 1.2

7 の分割 $\lambda = (4, 2, 1)$ は，以下のヤング図形で表される：



（ヤング）タブロー

定義 1.3

$\lambda \in P_n$ を枠とする**（ヤング）タブロー**とは，λ のヤング図形の各箱に $\{1, 2, \ldots, n\}$ の元を１つずつ書き入れたものをいう。

例 1.4

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 & 7 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$ は $\lambda = (4, 2, 1)$ を枠とするタブローである。

$\mathrm{Tab}(\lambda)$: λ を枠とするタブロー全体

定義 1.5

$T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$

T が**列標準** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各列の数字が上から下へ増加列

T が**行標準** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各行の数字が左から右へ増加列

T が**標準** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ T が列標準かつ行標準

分割 λ のシュペヒトイデアル

定義 1.6 (シュペヒト多項式)

$\lambda \in P_n$

$S = K[x_1, \dots, x_n]$: 無限体 K 上の n 変数多項式環

$T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ に対して，シュペヒト多項式 $f_T \in S$ とは，
i と j が T の同じ列にあり，j が i より下にあるような
すべての $x_i - x_j$ の積をいう。

例 1.7

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 & 7 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$ に対して，$f_T = (x_3 - x_4)(x_3 - x_6)(x_4 - x_6)(x_2 - x_5)$.

$I_\lambda := \langle f_T : T \in \mathrm{Tab}(\lambda) \rangle \subset S$　　λ を枠とするシュペヒトイデアル

分割 λ のシュペヒトイデアル

例 1.8

$\lambda = (3,2) = \ydiagram{3,2}$ に対して，I_λ の生成系は

$$
\begin{array}{lll}
(x_1 - x_2)(x_3 - x_4), & (x_1 - x_2)(x_3 - x_5), & (x_1 - x_2)(x_4 - x_5), \\
(x_1 - x_3)(x_2 - x_4), & (x_1 - x_3)(x_2 - x_5), & (x_1 - x_3)(x_4 - x_5), \\
(x_1 - x_4)(x_2 - x_3), & (x_1 - x_4)(x_2 - x_5), & (x_1 - x_4)(x_3 - x_5), \\
(x_1 - x_5)(x_2 - x_3), & (x_1 - x_5)(x_2 - x_4), & (x_1 - x_5)(x_3 - x_4), \\
(x_2 - x_3)(x_4 - x_5), & (x_2 - x_4)(x_3 - x_5), & (x_2 - x_5)(x_3 - x_4).
\end{array}
$$

単項式順序

$S := K[x_1, \dots, x_n]$: 体 K 上の n 変数多項式環

定義 2.1

S の単項式全体の集合における全順序 $<$ が**単項式順序**であるとは，以下の 2 条件をみたすときにいう：

1. 任意の単項式 $u \neq 1$ に対して，$1 < u$
2. 任意の単項式 u, v, w に対して，「$u < v \Rightarrow uw < vw$」

例 2.2 (辞書式順序 $(x_{i_1} > \cdots > x_{i_n})$)

まず，x_{i_1} に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_{i_2} に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_{i_3} に関して次数を比較して，・・・

重み順序

例 2.3 (重み順序 $<_{\mathbf{w}}$)

$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ と単項式順序 $<$ に対して，

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} <_{\mathbf{w}} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n a_i w_i < \sum_{i=1}^n b_i w_i \\ \text{or} \\ \sum_{i=1}^n a_i w_i = \sum_{i=1}^n b_i w_i \text{ かつ } x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} < x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \end{array}$$

と定義すると $<_{\mathbf{w}}$ は単項式順序である（重み順序）。

- 2 変数以上の多項式環には，無限個の単項式順序が存在する。

グレブナー基底

S の単項式順序 $<$ を 1 つ固定する。

定義 2.4

$0 \neq f \in S$

$\mathrm{in}_<(f)$: f に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のもの

$I \subset S$: イデアル

$\mathrm{in}_<(I) := \langle \mathrm{in}_<(f) : 0 \neq f \in I \rangle$ $\quad$ I のイニシャルイデアル

$\{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ が $<$ に関する I のグレブナー基底

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{in}_<(I) = \langle \mathrm{in}_<(g_1), \ldots, \mathrm{in}_<(g_t) \rangle$

- グレブナー基底は必ず存在するが一意ではない。
- イデアル I のグレブナー基底は I を生成する。

グレブナー基底の基本的な性質

定義 2.5

イデアル $I \subset S$ のグレブナー基底 $\mathcal{G}$ が **被約** であるとは，
以下が成り立つときにいう：

1. 任意の $g \in \mathcal{G}$ はモニック
2. 任意の $g \in \mathcal{G}$ に対して，g に現れる任意の単項式が

$$\{\mathrm{in}_<(g') : g \neq g' \in \mathcal{G}\}$$

　　の元で割り切れない

- イデアルと単項式順序を固定すると，被約グレブナー基底は **唯一つ** 存在する。

普遍グレブナー基底

定義 2.6

$I \subset S$：イデアル

任意の単項式順序に関して I のグレブナー基底になる有限集合を I の**普遍グレブナー基底**という。

- $I \subset S$ のイニシャルイデアルは，高々有限個しか存在しない。
- よって，例えば，以下の集合は I の普遍グレブナー基底である。

$$\bigcup_{<:S\text{ の単項式順序}} \mathcal{G}_<$$

（ただし，$\mathcal{G}_<$ は $<$ に関する I の被約グレブナー基底）

イニシャルフォームイデアル

定義 2.7

$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \prec x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} a_i w_i < \sum_{i=1}^{n} b_i w_i$$

と定義すると，S の単項式全体上の半順序となる。

- $0 \neq f \in S$ に対して，この順序で最大となる項の和を f の**イニシャルフォーム**といい，$\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(f)$ と表す。
- 斉次イデアル $I \subset S$ に対して，

  $$\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \mathrm{in}_{\mathbf{w}}(f) : 0 \neq f \in I \rangle$$

  を I の**イニシャルフォームイデアル**という。
- I は斉次なので，任意の $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\mathrm{in}_{\mathbf{w}_1}(I) = \mathrm{in}_{\mathbf{w}_2}(I)$ をみたす $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ が存在する。

ステイト多面体

- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$C[\mathbf{w}] := \{\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^n : \mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I) = \mathrm{in}_{\mathbf{w}'}(I)\}$.
- 扇とは，原点からの錐からなる多面体的複体をいう。

定義 2.8

$\mathrm{GF}(I) := \left\{\overline{C[\mathbf{w}]} : \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n\right\}$, ただし，$\overline{C[\mathbf{w}]}$ は $C[\mathbf{w}]$ の閉包
このとき，$\mathrm{GF}(I)$ は扇であり，I のグレブナー扇と呼ばれる。

$\mathrm{GF}(I)$ は 完備である，すなわち，$\bigcup_{C \in \mathrm{GF}(I)} C = \mathbb{R}^n$.

定義 2.9

- 凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ の正規扇とは P の双対をいう。
- 凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ が I のステイト多面体であるとは，$\mathrm{GF}(I)$ が P の正規扇であるときにいう。

I のイニシャルイデアル $\longleftrightarrow$ I のステイト多面体の頂点

フィルター $\mathcal{F}$ のシュペヒトイデアル

定義 3.1 (支配的順序 $\trianglerighteq$)

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l) \in P_n$ が

$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k \quad$ for $k = 1, 2, \ldots, \min\{m, l\}$

をみたすとき，$\lambda \trianglerighteq \mu$ と表す。

定義 3.2

$\mathcal{F} \subset P_n$ が P_n の lower filter

$\Leftrightarrow \lambda \in \mathcal{F}$ と $\mu \in P_n$ が $\mu \trianglelefteq \lambda$ をみたすならば $\mu \in \mathcal{F}$ が成り立つ

定義 3.3

$\mathcal{F} \subset P_n$ が P_n の upper filter

$\Leftrightarrow \lambda \in \mathcal{F}$ と $\mu \in P_n$ が $\mu \trianglerighteq \lambda$ をみたすならば $\mu \in \mathcal{F}$ が成り立つ

フィルター $\mathcal{F}$ のシュペヒトイデアル

$\mathcal{F}$: P_n の lower filter

$I_{\mathcal{F}} := \sum_{\lambda \in \mathcal{F}} I_\lambda \subset S$ 　 $\mathcal{F}$ のシュペヒトイデアル

事実 3.4

$$\mu \trianglelefteq \lambda \quad \Rightarrow \quad I_\mu \subset I_\lambda$$

P_n の lower filter として

$$\mathcal{F} = \{\mu \in P_n : \mu \trianglelefteq \lambda\}$$

を考えれば，$I_\lambda = I_{\mathcal{F}}$ が成り立つ。

軌道型

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の K^n への自然な作用を考える。

各点 $\boldsymbol{a} \in K^n$ に対する，この作用に関する $\mathfrak{S}_n$ の固定化部分群は，ある $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in P_n$ について，$\mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_r}$ と同型。

この分割 μ を $\boldsymbol{a}$ の**軌道型**といい，$\Lambda(\boldsymbol{a})$ で表す。

例 3.5

$$\Lambda((4,0,2,4,2,4)) = (3,2,1).$$

$\mu \in P_n$ に対して，$H_\mu = \{\boldsymbol{a} \in K^n : \Lambda(\boldsymbol{a}) = \mu\}$ とおく。
部分集合 $\mathcal{G} \subset P_n$ に対して，

$$J_{\mathcal{G}} = \{f \in S : f(\boldsymbol{a}) = 0 \text{ for } \forall \boldsymbol{a} \in \bigcup_{\mu \in \mathcal{G}} H_\mu\}$$

と定義する。（注：これは被約イデアルである。）

Haiman–Woo

補題 3.6

$\lambda \in P_n$, $T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ とする。このとき，

$$f_T(\boldsymbol{a}) = 0 \text{ for } \forall \boldsymbol{a} \in H_\mu \text{ with } \mu \ntrianglelefteq \lambda.$$

定理 3.7 (Haiman–Woo)

$\emptyset \neq \mathcal{F} \subset P_n$: lower filter
$G_{\mathcal{F}} := \{f_T : T \in \bigcup_{\lambda \in \mathcal{F}} \mathrm{Tab}(\lambda)\}$.
このとき，以下が成り立つ。

1. $I_{\mathcal{F}} = J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$ が成り立つ。特に，$I_{\mathcal{F}}$ は被約である。
2. $G_{\mathcal{F}}$ は $I_{\mathcal{F}}$ の普遍グレブナー基底である。

注：$I_{\mathcal{F}} = \langle G_{\mathcal{F}} \rangle$. また，補題 3.6 より，$G_{\mathcal{F}} \subset J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$ が従う。

簡明な証明（Murai–O.–Yanagawa）

定義 4.1

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in P_n$, $0 < k \in \mathbb{Z}$ に対して，
$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k + 1, \ldots, \lambda_m)$ の成分を大きい順に並べ替えて得られる $n+1$ の分割を $\lambda + \langle k \rangle$ で表す。
($k > m$ のときは，$\lambda + \langle k \rangle = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 1)$)

例 4.2

$(4, 2, 2, 1) + \langle 3 \rangle = (4, 3, 2, 1)$.
$(4, 2, 2, 1) + \langle 5 \rangle = (4, 2, 2, 1, 1)$.

簡明な証明（Murai–O.–Yanagawa）

補題 4.3

P_n の *upper filter* $\mathcal{F}$ と，$\lambda \in P_{n-1}$ に対して，

$$\lambda + \langle j \rangle \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \lambda + \langle i \rangle \in \mathcal{F} \text{ for } \forall i \leq j$$

Proof.

任意の $\lambda \in P_{n-1}$ に対して，

$$i \leq j \Longrightarrow \lambda + \langle j \rangle \trianglelefteq \lambda + \langle i \rangle$$

であることから直ちに従う。 □

簡明な証明（Murai–O.–Yanagawa）

定義 4.4

$\mathcal{F} \subset P_n$ に対して，$\mathcal{F}_k := \{\mu \in P_{n-1} : \mu + \langle k \rangle \in \mathcal{F}\}$ と定義する。

注：$\mathcal{F}$ が upper (lower) filter ならば，$\mathcal{F}_k$ もそうである。

例 4.5

$\mathcal{F} = \{(4,1,1),(3,3),(4,2),(5,1),(6)\}$ に対して，
$\mathcal{F}_1 = \{(3,1,1),(3,2),(4,1),(5)\}$,
$\mathcal{F}_2 = \{(3,2),(4,1),(5)\}$,
$\mathcal{F}_k = \{(4,1),(5)\}$ for $\forall k \geq 3$.

補題 4.6

$\mathcal{F} \subset P_n$: upper filter

$$f = g_d x_n^d + \cdots + g_1 x_n + g_0 \in J_{\mathcal{F}},$$

ただし，$g_0, \ldots, g_d \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ かつ $g_d \neq 0$.
このとき，$g_0, \ldots, g_d$ は $J_{\mathcal{F}_{d+1}}$ に属する。

Proof 1

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{F}_{d+1}$, $\boldsymbol{a} \in H_\lambda$ とする。
$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ は相異なり，各 $\alpha_i \in K$ は $\boldsymbol{a}$ に λ_i 回現れるとする。
前の補題より，$\lambda + \langle i \rangle \in \mathcal{F}$ for $1 \leq \forall i \leq d+1$.
$m < d+1$ のとき：
$\lambda + \langle d+1 \rangle = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 1)$ なので，各 $\alpha \in K \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ に対して，$(\boldsymbol{a}, \alpha) \in H_{\lambda + \langle d+1 \rangle}$. $\therefore f(\boldsymbol{a}, \alpha) = 0$.
$m \geq d+1$ のとき：
$i = 1, 2, \ldots, d+1$ に対して，$(\boldsymbol{a}, \alpha_i) \in H_{\lambda + \langle i \rangle}$ より，$f(\boldsymbol{a}, \alpha_i) = 0$.

続き.

いずれの場合も，次数 d の多項式

$$f(\boldsymbol{a}, x_n) = \sum_{k=0}^{d} g_k(\boldsymbol{a}) x_n^k \in K[x_n]$$

が少なくとも $d+1$ 個の根を持つので，これは $K[x_n]$ のゼロ多項式。
$\therefore\ g_i(\boldsymbol{a}) = 0$ for each i.
よって，$g_i \in J_{\mathcal{F}_{d+1}}$ for $\forall i$ が成り立つ。 $\square$

簡明な証明（Murai–O.–Yanagawa）

補題 4.7

$\emptyset \neq \mathcal{F} \subset P_n$: *lower filter*
このとき，辞書式順序 $<_{\mathrm{lex}}$ $(x_1 < \cdots < x_n)$ に関して，

$$G_{\mathcal{F}} = \left\{ f_T : T \in \bigcup_{\lambda \in \mathcal{F}} \mathrm{Tab}(\lambda) \right\}$$

は，$J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$ のグレブナー基底である。

証明のポイント：

- (再掲) $\mathcal{F}' = P_n \setminus \mathcal{F}$ とおくと，補題 3.6 より，$G_{\mathcal{F}} \subset J_{\mathcal{F}'}$.
- あとは，任意の $f \in J_{\mathcal{F}'}$ に対して，$\mathrm{in}(f_{T'}) | \mathrm{in}(f)$ をみたす $T' \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ $(\lambda \in \mathcal{F})$ が存在することを示せばよい。
- T が列標準であり，番号 i が T の d_i 番目の行にあるならば，$\mathrm{in}(f_T) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{d_i - 1}$.
- n に関する帰納法で証明する。($n = 1$ のときは自明。)

$f = g_d x_n^d + \cdots + g_1 x_n + g_0 \in J_{\mathcal{F}'}$ とおく。
ただし，$g_0, \ldots, g_d \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ かつ $g_d \neq 0$ である。

- 補題 4.6 より，$g_d \in J_{\mathcal{F}'_{d+1}}$.
- 帰納法の仮定から，$G_{P_{n-1} \setminus \mathcal{F}'_{d+1}}$ は $J_{\mathcal{F}'_{d+1}}$ のグレブナー基底。

ゆえに，$\exists T \in \mathrm{Tab}(\mu)$ with $\mu \in P_{n-1} \setminus \mathcal{F}'_{d+1}$ s.t. $\mathrm{in}(f_T) | \mathrm{in}(g_d)$.
(注：$g_d \neq 0$ かつ $J_{P_{n-1}} = \{0\}$ より，$\mathcal{F}'_{d+1} \neq P_{n-1}$.)
$\lambda = \mu + \langle d+1 \rangle$ とおく。
$1, 2, \ldots, n-1$ が T と同じ位置にある $T' \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ を考える。
$\mu \notin \mathcal{F}'_{d+1}$ より $\lambda \in \mathcal{F}$ であるから，$f_{T'} \in G_{\mathcal{F}}$ が成り立つ。
T における n の位置は，第 $(p+1)$ 行 $(p \leq d)$ であるから，
$\mathrm{in}(f_{T'}) = x_n^p \mathrm{in}(f_T)$ は $\mathrm{in}(f) = x_n^d \mathrm{in}(g_d)$ を割り切る。
ゆえに $G_{\mathcal{F}}$ は $J_{\mathcal{F}'}$ のグレブナー基底である。

簡明な証明（Murai–O.–Yanagawa）

Haiman–Woo の定理の証明.

$G_{\mathcal{F}}$ は $J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$ のグレブナー基底であるから，$I_{\mathcal{F}} = \langle G_{\mathcal{F}} \rangle = J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$.
特に，$I_{\mathcal{F}}$ は被約であり，$G_{\mathcal{F}}$ は
辞書式順序 $(x_1 < \cdots < x_n)$ に関して，$I_{\mathcal{F}}$ のグレブナー基底

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$G_{\mathcal{F}} = \{\sigma f : f \in G_{\mathcal{F}}\}$ であるから，$G_{\mathcal{F}}$ は
辞書式順序 $(x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)})$ に関して，$I_{\mathcal{F}}$ のグレブナー基底

$<$ を任意の単項式順序とする。
$<$ に関して $x_{i_1} < \cdots < x_{i_n}$ が成り立つとする。
f_T は１次式の積であるから，$\mathrm{in}_{<}(f_T) = \mathrm{in}_{<'}(f_T)$ が成り立つ。
ただし，$<'$ は辞書式順序 $(x_{i_1} < \cdots < x_{i_n})$ である。
$\therefore$ $G_{\mathcal{F}}$ は任意の単項式順序 $<$ に関して，$I_{\mathcal{F}}$ のグレブナー基底 $\square$

簡明な証明（Murai–O.–Yanagawa）

注意 4.8

定理 *3.7* (2) の主張は有限体 K についても成り立つ。実際，

- K が有限体でも，*1* 変数有理関数体 $K(t)$ は無限体であるから，$K(t)$ が係数体なら定理 *3.7* が成り立つ。
- 各 f_T の係数は ± 1 であるから，$G_{\mathcal{F}}$ にブッフバーガーの判定法を用いた場合，変数 t は決して現れない。

ステイト多面体

定義 5.1

$(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\{(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) \in \mathbb{R}^n : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

の凸閉包を $P_n(u_1, \ldots, u_n)$ で表す。
特に，$\Pi_n := P_n(1, 2, \ldots, n)$ は n 次の 置換多面体と呼ばれる。

置換多面体 Π_n の正規扇 Br_n は braid 扇と呼ばれる完備扇であり，超平面 $x_i - x_j = 0$ (for $\forall i \neq \forall j$) で与えられる。

ステイト多面体

Br_n の各極大錐は，ある $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : w_{\sigma(1)} \leq w_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq w_{\sigma(n)}\}$$

各 $0 \leq k < n$ に対して，

$$\Pi_{n,k} := P_n(1, 2, \ldots, n-k-1, n-k, \ldots, n-k).$$

このとき，$\Pi_{n,k}$ の正規扇の各極大錐は，ある $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$C_{\sigma,k} := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : w_{\sigma(1)} \leq w_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq w_{\sigma(n-k)}, \ldots, w_{\sigma(n)}\}$$

定義 5.2

一般化置換多面体とは，辺の方向を維持しながら，置換多面体の頂点を移動して得られる多面体である。

補題 5.3

各 $\Pi_{n,k}$ は一般化置換多面体である。

イニシャルイデアル・ステイト多面体 (O.–Yanagawa)

定理 5.4

n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ $(\lambda_m > 0)$ に対して，

$$k := \min\{\, \lambda_{i-1} - \lambda_i : i = 2, 3, \ldots, m \,\}$$

とおく。このとき，

1. I_λ はちょうど $n!/(k+1)!$ 個のイニシャルイデアルを持つ。
2. $\Pi_{n,k}$ は I_λ のステイト多面体である。
3. I_λ のステイト多面体が（通常の）置換多面体であることと，ある $i \le m$ に対して，$\lambda_i = \lambda_{i-1}$ が成り立つことは同値。

参考文献

Combinatorial commutative algebra

- C. McDaniel and J. Watanabe, Principal radical systems, Lefschetz properties and perfection of Specht Ideals of two-rowed partitions, *Nagoya Math. J.* **247** (2022), 690–730.
- X. Ren and K. Yanagawa, Gröbner bases of radical Li-Li type ideals associated with partitions, to appear in *SIAM J. Discrete Math.*
- K. Shibata and K. Yanagawa, Regularity of Cohen-Macaulay Specht ideals, *J. Algebra* **582** (2021), 73–87.
- K. Shibata and K. Yanagawa, Elementary construction of the minimal free resolution of the Specht ideal of shape $(n-d, d)$, *J. Algebra* **634** (2023), 563–584.

参考文献

Algebra and combinatorics of subspace arrangements

- A. Brookner, D. Corwin, P. Etingof, and S.V. Sam, On Cohen–Macaulayness of S_n-invariant subspace arrangements, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2016), 2104–2126.
- C. Berkesch Zamaere, S. Griffeth, and S.V. Sam, Jack polynomials as fractional quantum Hall states and the Betti numbers of the $(k+1)$-equals ideal, *Comm. Math. Phys.* **330** (2014), 415–434.
- A. Björner, I. Peeva and J. Sidman, Subspace arrangements defined by products of linear forms, *J. London Math. Soc.* (2) **71** (2005), 273–288.

参考文献

Graph theory

- J. de Loera, Gröbner bases and graph colorings, *Beiträge Algebra Geom.* **36** (1995), 89–96.
- S.-Y.R. Li and W.C.W. Li, Independence numbers of graphs and generators of ideals, *Combinatorica* **1** (1981) 55–61.
- L. Lovász, Stable sets and polynomials, *Discrete Math.* **124** (1994), 137–153 .

参考文献

Symmetric system of equations

P. Moustrou, C. Riener and H. Verdure, Symmetric ideals, Specht polynomials and solutions to symmetric systems of equations, *J. Symbolic Comput.* **107** (2021), 106–121.

Generalization

S Debus, P Moustrou, C Riener, H Verdure, The poset of Specht ideals for hyperoctahedral groups, arXiv:2206.08925

ご清聴ありがとうございました！