第 3 章　波　動

はじめに

振動や波動現象は広範な物理現象と深く関連する重要なテーマである。共鳴（共振)、位相、振動の伝播、干渉という抽象的な物理概念を具体的な現象として視覚的に理解させることを目的として、数少ないながら興味ある実験テーマを選んで実演した。

波動の特色は周期運動である。周期運動でもっとも簡単なものは力学の章で述べた円運動である。また単振動も周期運動のひとつである。さらに波動は空間的にも時間的にも伝わって行く。周期運動の仕方や波の伝わり方にはさまざまあり、以下順にその特徴を述べる。

§3.1　簡単な周期運動（振子の運動：単振動）

ばね振子や単振子のような周期的の往復運動を単振動という。

図 3−1 のように、等速円運動をしている物体に左側から平行光線を照射すると、その正射影は右側のスクリーン上で往復運動をするので、その時間的変化は、図 3−2 のようなサインカーブを描く。物体 P が半径 A の円周上を角速度 ω で等速円運動をすると、スクリーン上の影 P' の位置 x [m]は、$x = A\sin\omega t$ となる。時刻 $t = 0$ のときの角度を ϕ とすると、P' の位置 x は、

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

で表される。上式は単振動の基本式で、A を振幅、ω を角振動数(または角周波数)、$\omega t + \phi$ を位相、ϕ を初期位相という。振幅 A は変位の最大値を表す。また、1 秒間に振動する回数 ν を振動数(周波数)とよび、その単位には Hz を用いる。振動数の逆数、つまり 1 振動に要する時間 T を周期という。角振動数、周期、振動数は、それぞれ等速円運動の角速度、周期、回転数に対応するので、ω、T、ν の間には次の関係が成り立つ。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

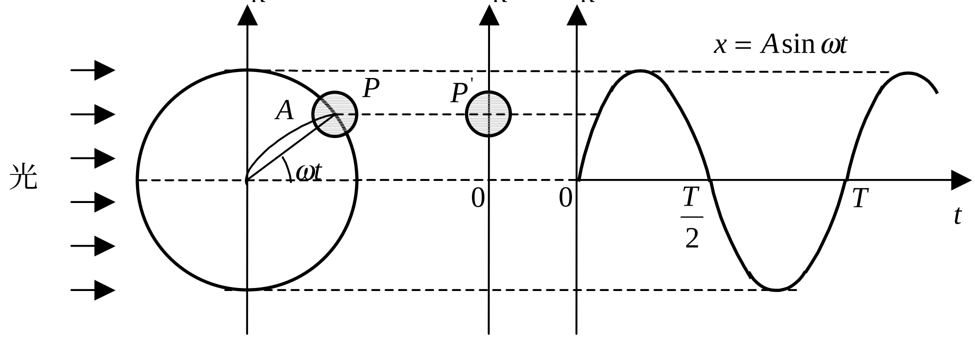


図 3−1 等速円運動とその影の運動　　**図 3−2 影の運動の時間的変化**

1‐A)　円運動（ビデオ）

円運動(第 11 巻)、メカニカル・ユニバース　日本語版、　丸善(株)

1‐B)　調和振動（ビデオ）

調和振動(第 3 巻)、メカニカル・ユニバース　日本語版、丸善(株)

§3.2　減衰振動

単振動は、振動体が摩擦や抵抗よるエネルギーの損失が永久になく振動を続けるという仮定での運動である。しかし、実在の振動体に対してはあてはまらない。実在の振動は必ずエネルギーの損失が起き、振幅が時間の経過と共に減衰していく。

この減衰振動には図 3―3 に示すような３つのパターンがある。

空気抵抗やバネの内部摩擦は、速度の小さいときは速度に比例すると考えてよいので、数学的に減衰を取り扱うには、減衰のない振動の場合の運動方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ に、抵抗を表す項 $-a\dfrac{dx}{dt}$ を付け加えたもの

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt}$$

を解けばよい。その結果は、条件にしたがって(a)過減衰 (over damping)、(b) 臨界減衰(critical damping)、(c)減衰振動(damped oscillation)となる。臨界減衰の条件が成り立つとき、振動体が最も速く平衡位置に落ち着く。この事実は、迅速に振動を制止したいという実際上の問題においても重要である。抵抗があって振動が減衰するのは運動エネルギーと位置エネルギーが熱エネルギーに変わるということで、振動を不減衰振動（undamped oscillation）の状態に保つためには絶えず外からエネルギーを補給しなければならない。

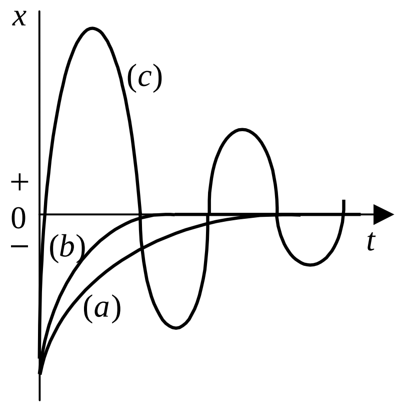


図 3―3 減衰振動

(a)　$a^2/4 > k$　のとき

(b)　$a^2/4 = k$　のとき

(c)　$a^2/4 < k$　のとき

2‐A)　音叉の不減衰振動（島津製）

音叉に不減衰振動を起こさせる方法としては、電磁的方法もあるが、簡単にでき、振動数の大きい場合に適する方法としては、図 3―4 に示すような仕掛けで圧縮空気を吹きつけるのがよい。

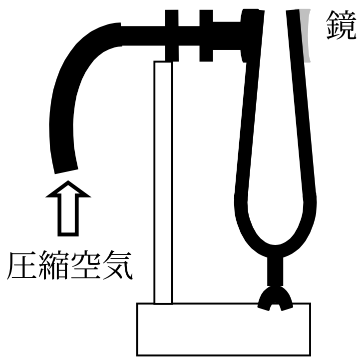


図 3―4

図 3―5 のように、音叉の一端につけたでっぱりが、空気の吹き出し口の円筒内に接触しない程度すれすれ

に入り込むことができるようになっている。(空気を送ると、でっぱりが右の方に押し出されて、それと吹き出し口との間に環状の隙間ができ、その間を流線密度の大きな空気の流れが吹き出す。ベルヌーイの定理によって、そこの圧力が減少するので、再びでっぱりは吹き出し口の円筒内に押し返される。このような過程が繰り返されて音叉が振動するのである。

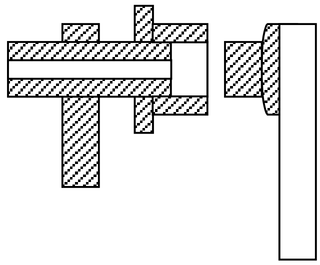


図 3－5

§3.3　強制振動と共振

強制振動と共振(共鳴)

→ 固有角振動数をもった調和振動子（単振動している物体）に、周期的な外力を加えたときに起こる振動。

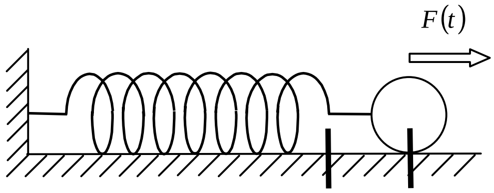


図 3－6

固有角振動数ω_0の調和振動子に、振動する外力

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \qquad ・・・①$$

が働くと、振動子は外力の角振動数ωで振動する(図 3－6)。これを強制振動という。

強制振動では、外力がする仕事が摩擦によるエネルギー損失を補うため、振動が減衰せずに持続する。強制振動の振幅はωとω_0の差に依存して変わる。バネ定数kのバネに結ばれた質量mのおもりに、変位xに比例する復元力$-kx$および速度$v = dx/dt$に比例する摩擦力$-m\gamma v$と①の形の外力$\mathrm{F(t)}$が働くとする。

運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma v + F_0 \cos \omega t$$

つまり

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t \qquad ・・・②$$

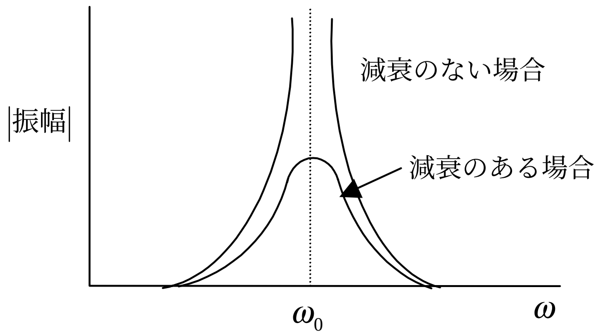
と書ける（ ${\omega_0}^2 \equiv k/m$ ）。　　⇒　強制振動の方程式

摩擦力（②式の左辺第二項）を無視すれば、②式は

$$x(t) = \frac{1}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

という特解を持つ。　　　　⇒　強制振動を表す解

この解は $\omega = \omega_0$ で振幅が無限大になる(図 3－7)。



ωとω$_0$が近い（ωとω$_0$の差が小さい）と、振幅は大きな値をとる。この現象を**共振**または**共鳴**という。

図 3－7　共鳴曲線

弱い摩擦がある場合②式は次の解を持つ。共鳴振動数のごく近くで共鳴曲線は最大値をとり、$\dfrac{\omega_0}{\gamma}$ が共鳴曲線の鋭さの指標となる。

$$x = A\cos(\omega t - \varphi) \quad 、\quad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad 、\quad \tan\varphi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2}$$

振動は、外力の振動に比べ位相がφだけ遅れる。位相の遅れφをωに対してプロットしたものが図 3－8 である。

共鳴するとき、振子の運動は外力の振動に比べ位相が 90 ° 遅れることになる。外力の振動数が ω_0 に比べ小さいときは同位相、それが ω_0 に比べ十分大きくなると、逆位相で振動することになる。

このとき、外力が振子に対してなす仕事量は、$\sin\varphi$ に比例するので、$\varphi = 0°,180°$ではエネルギー移動は 0 で、$\varphi = 90°$のとき最大のエネルギー移動が起きることになる。

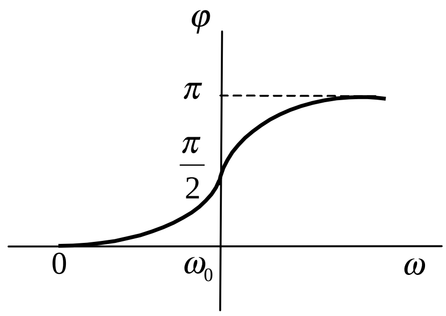


図 3－8

3‐A）　周波数計

交流の周波数を測定する周波数計は、種々の固有振動数を持つ小さな鉄片を一列に並べ、これを電磁石の間に挟んで電磁石に交流電流を流して、鉄片を振動させるものである。このとき、固有振動数が交流の周波数と一致する鉄片の振幅が大きくなって、周波数を測ることができる。

3‐B）　タコマナロウズ橋の崩壊(大沢ループフィルム)

摩擦が少なければ、共鳴現象を使って指 1 本でも大きな釣鐘を動かすことが可能である。これに似た現象が実際に起きて大惨事となった。

1940 年 7 月 1 日、ワシントン州タコマ市の近くに一つのつり橋が開通した。その長さは約 640m、幅約 12m あり、銅鉄製の橋桁の高さは 25m 近くもあった。

11 月 7 日の早朝は、風速が毎時 64km から 72km もあった。これは橋ができて以来見たことのない速さであった。そこで、午前 9 時 30 分に交通止めになり、橋は振動数 36 回／分で 8〜9 部分に分かれて振動し、波高は 9cm 位であった。10 時頃突然ねじり振動を始め、その振動数は毎分 14 回で 2 つの部分に分かれて振動していた。また、このねじり振動の振幅は、水平面からそれぞれの方向に約 35°であった。午前 11 時頃、橋の中央部が壊れた。ねじり振動が最も激しくなったとき、橋桁の中央部に横方向の節線が一つあり、縦方向の節線が通路の中央（センターライン）にあった。

午前 10 時にねじり振動が起こったのは、橋を吊っているケーブルの止め環がはずれたのが原因であった。ケーブルの中央部は、橋の中央部に対して前後に往復運動をしていた。これが橋全体のねじれを起こしたらしい。風速は、ねじり振動に対して限界点に近く、共鳴によって生じた振動は、必然的に橋を崩壊させてしまったのである。

この橋は、同じ場所に同じ主柱を使って再建された。ワシントン大学の工学実験所が設計について研究し、新しい橋には、橋桁の代わりに別の構造を用いることにした。そして、新しい橋には何事も起こっていない。

§3.4　連成振動

２つあるいはそれ以上の振動系に相互作用をもたせて連結した系が行う振動を連成振動という。連成振動は、多原子分子の振動、電気振動等でも扱われる。

4 - A）ばねの振動運動：連結振動（島津製）

図 3－9 のようなおもりを吊るしたばね２本を同じ棒に吊るし、２本のばねをゴムで連結する。このときのばねの振動の様子をみる。

・運動の変化の様子

①左側のおもりを引いてばねを振動させる。
②左側のばねの振幅が小さくなるにつれて、右側のばねが振動し始め、どんどん振幅が大きくなる。
③やがて左側のばねが止まる。このとき、右側のばねの振幅は最大になる。

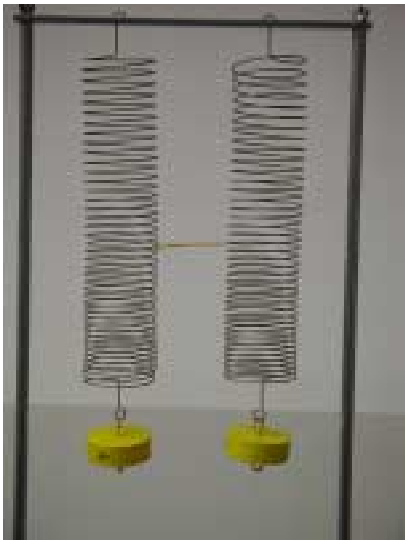


図 3－9　共振り振子

④右側のばねの振幅が小さくなるにつれて、左側のばねが振動し始め、どんどん振幅が大きくなる。
⑤やがて右側のばねが止まる。このとき、左側のばねの振幅は最大になる。
⑥②～⑤が繰り返される。

※２本のばねを連結している**ゴムを通してエネルギーが移動する。**

このとき２つの振子の振動の位相はずれていて、一方の振子の振動が他の振子に対する外力として作用して強制振幅を起こし、作用・反作用の法則によって一方はエネルギーを失い、他方はエネルギーを獲得するということが交互に繰り返される。
一方の振子に錘を付加して固有振動数を変える(遅くする)と、エネルギー移動は大きく減少する。

4‐B）　弱く結合した２つの単振子間のエネルギー振動

図 3－10 のように糸で連ねた 2 つの振子の片方を止めておいて、もう一方を振動させたときの運動の様子をみる。＜赤い方の振子を振動させる。＞

・運動の変化の様子

①赤い振子は振動によるエネルギーを持つ。
②赤い振子のエネルギーが糸によって少しずつ銀色の振子に伝わる。赤い振子の振幅は弱くなり、銀色の振子が振動を始める。
③やがて、赤い振子は静止し、銀色の振子の振幅が最大になる。
④今度は銀色の振子から赤い振子へと①～③と同様の変化が見られる。
⑤①～④のエネルギーの移り変わりが繰り返される。

図 3－10

これは、２つの振子を連結した糸を介して、一方の振動が他方の振子の外力として働き共鳴が起きる。
また、4－A のばねの連結振動と同様の位相関係が明瞭にわかる。

4‐C）　剛体の回転と振動間のエネルギー移動

図 3－11 のように、針金に吊るしたおもりをねじれ振動させる。針金のねじり係数をσとすると、おもりが釣り合いの位置から角θだけ回転した位置では、針金のねじり能率は$\sigma\theta$に等しいので
おもりの運動方程式は

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+\sigma\theta=0$$

I：慣性モーメント
θ：ねじれ角

ここで、

$$\sigma=\frac{\pi Gr^4}{2l}$$

G：剛性率
r：針金の半径
l：針金の長さ

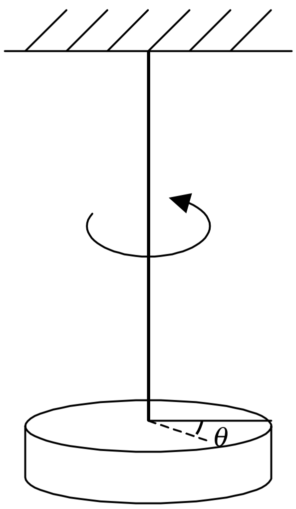


図 3－11

となる。

よって、ねじり振子の運動はねじり単振動となり角振動数および周期は次のようになる。

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{I}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\sigma}}$$

次に、図 3－12 のように横棒をもつ錘をバネで吊り下げ、錘のねじり振動とバネの伸縮振動が同時に起きる器具を用いて実験する。ねじり振動の固有振動数とバネの伸縮振動の固有振動数が一致すると、共振現象が起きて興味ある錘の運動を観察することができる。

実　験　バネを適当に縮めて振動（上下運動）をさせる。⟹ **共振現象**が起こる。

①バネの振幅が小さくなるにつれて、おもり部分が回転（ねじり振動）し始め、バネの振動が完全に止まった（振幅＝０）ときにおもりのねじれ角（回転スピード）が最大になる。

②おもりのねじれ角（回転スピード）が小さくなるにつれてバネが振動をし始め、おもりの回転が止まった（ねじれ角＝０）ときにバネの振幅が最大になる。

③①・②を繰り返す。

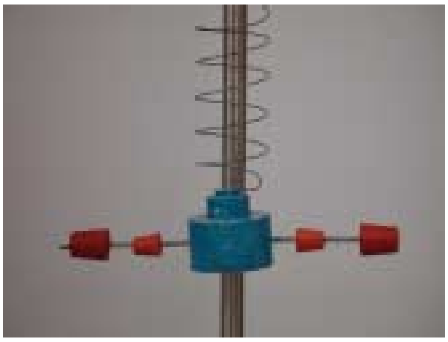


図 3－12

※おもりの両脇についているゴム栓の位置を変えると慣性モーメントが変わるので、ねじれの角振動数ωも変化する。

⟹ バネの固有振動数（角振動数）とおもりの角振動数が一致したとき共振が起こる。

§3.5　振動の観測

振動の波形はオッシロスコープを使って見るのが便利である。

<u>**2 つの振動の合成：リサージュ図形**</u>

＜互いに垂直な方向の単振動の合成＞

d_1とd_2が互いに垂直の方向の単振動であるとき、d_1の方向をx軸、d_2の方向をy軸とすれば(図 3－13)

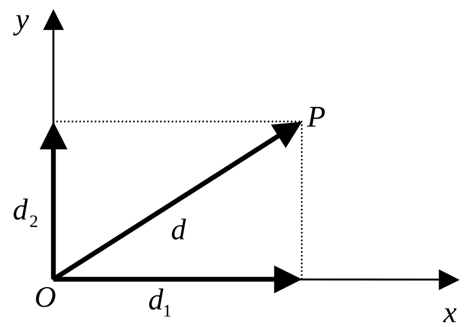


図 3－13

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv d_1(t) \\ &= D_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) \\ y &\equiv d_2(t) \\ &= D_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \end{aligned}\right\}$$

これを合成することは、x と y とをそれぞれ x および y 座標とする点 P の運動を求めることである。このとき ω_1 と ω_2 の比が整数比にならなければ P の運動は周期的にならない。このPの軌跡をリサージュ図形という。

作図で求めたり、様々な手段で実験的に描かせることはできる。この図形は $\omega_1 : \omega_2$ のか値および φ_{01} と φ_{02} によって異なる。(図 3－14)

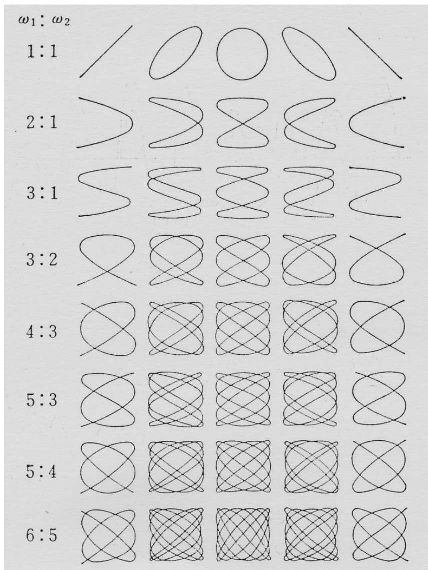


図 3－14 リサージュ図形

5－A) 連成振動・多原子分子の規準振動モード(8mm フィルム)

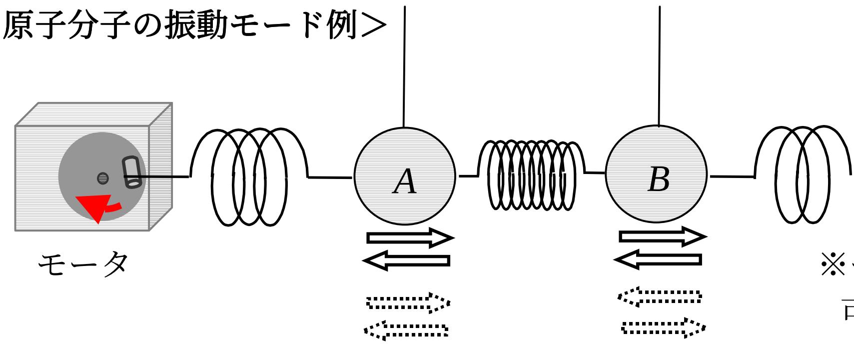
小球をばねで連結した連成振子の一部にモータをつないで、連成振子を強制振動させると興味深い現象が観測できる。

モータの回転数がある値をとるところで、連成振子は共鳴して特徴的な振動モードを示す。再びモータの回転数を上げて、共鳴状態が成立しなくなると、モータの回転運動のエネルギーは連成振子に吸収されなくなる。さらに、回転数を上げていくと、再び連成振子の固有振動数のところで、エネルギーが効率的に吸収されて、別のタイプの振動モードが観測される。

このことは、連成振子にはいくつかの固有振動数の異なる振動モードが存在し、強制振動との共鳴が起きるたびに異なった振動モードの振幅が急に増大して、観測されることを示している。これらは、多原子分子の規準振動モードで、赤外光が吸収される現象とよく似ている。

質量の等しい２つの小球 A・B をばね定数の強いばねで連結し、その両側を弱いばねで結んで一端を固定し、他端を水平方向の振動を励起するモータに結ぶ。

＜２原子分子の振動モード例＞



※モータの回転数は可変変圧器で調整する。

図 3－15

1. モータの回転数を増加させると、A・B の両方の小球が同じ方向への振動を始める。（AB 間の距離を変えずに重心が水平方向に振動する。）
　＜矢印：⇒＞
2. モータの回転数をさらに増加させると、ある振動数のところで、A と B のの小球が互いに逆方向への振動を始め、A・B を連結するばねの伸縮振動がおきる。＜矢印：⇢＞励起用モータの回転数と振動モードが共鳴するところで振幅は非常に大きくなる。
3. さらにモータの回転数を増加させると、共振条件をはずれて振幅は減衰し、振動が止まる。

質量の等しい３つの小球を図 3−16 のようにばねで連結する。A・B 間と B・C 間をばね定数の強いばねで結び、A と C を左右から B を上から弱いばねで水平に吊り下げた。C のばねの一端を固定し、A を励起用モータにつないで水平方向に振動させた。

＜３原子分子の振動モード例＞

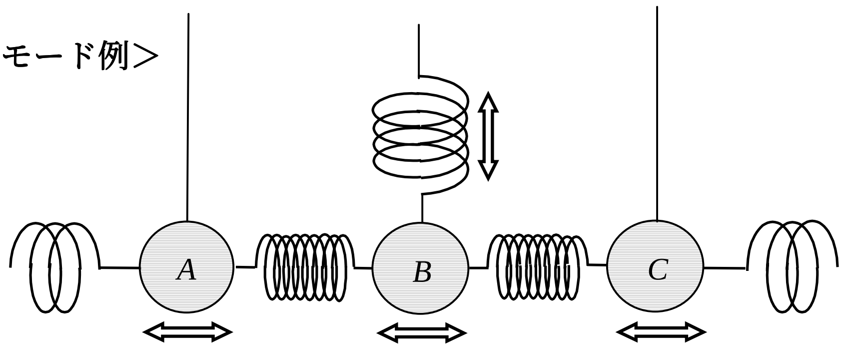


図 3−16

・パターン 1

1. モータの回転数を徐々に上げていくと、ある振動数のところで A と C はほぼ静止した状態で、B の小球が大きく上下運動を始める。
2. さらに回転数を増加させると、共振条件をはずれて、B の振幅が小さくなっていく。

・パターン 2

1. モータを一旦止めて、再びモータの回転数を増加させながら微調整すると、パターン 1 の場合と近い振動数のところで、今度は、B がほぼ静止した状態で、A と C の小球が左右に大きく振動を始める。このとき、AB 間と BC 間の２つのばねの伸縮振動は同期して起きる。
2. さらにモータの回転数を増加させると、上記の振動モードは減衰し、次の振動モードが現れ始める。すなわち、今度は A と C がほぼ静止した状態で、B が激しく左右に振動し始める。このとき２つのばねの伸縮振動は逆位相の関係になる。
3. 　さらに回転数を増加させると、この振動モードも減衰する。