

実験 長さ $2L = 100\text{ cm}$ の棒を用いて、懸垂点を変えたときの振動周期の測定を行う。

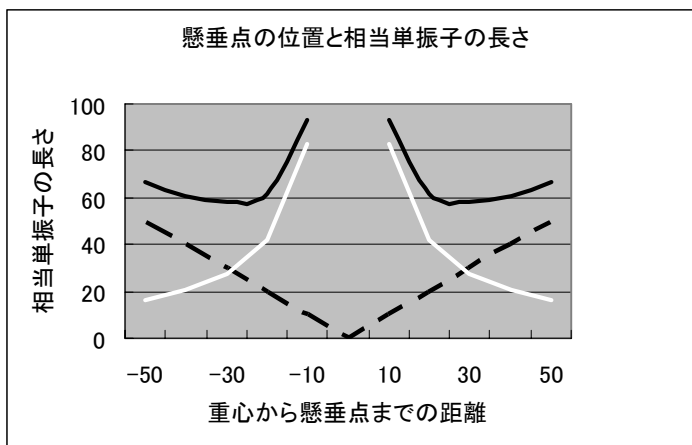
上端からの距離(cm)	周期(秒)
0 (50)	1.632
5 (45)	1.593
10 (40)	1.556
15 (35)	1.531
20 (30)	1.518
25 (25)	1.525
30 (20)	1.568
35 (15)	1.674
40 (10)	1.929
45 (5)	2.617

表 1 - 1

()内は重心からの距離 h



図 1 - 54 実験装置全体図

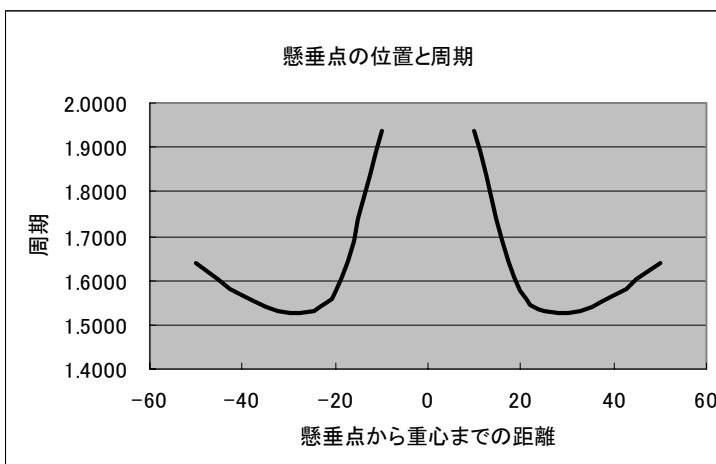


黒(破線) $y = x$

白 $y = \frac{L^2}{3x}$

黒(実線) $y = \frac{L^2}{3x} + x$

グラフ 1 - 1 懸垂点の位置と相当単振子の長さ



グラフ 1 - 2 懸垂点の位置と周期

5 B) Kater の可逆振子 (島津製) < 重力加速度の絶対測定に使う >

振動の中心 O' (懸垂点から相当単振子の長さの位置) と懸垂点 O (回転の中心) は交換しても同じ振動周期で振れることを利用して重力加速度 g を求めるための実験。

剛体内に懸垂点 O と振動の中心 O' との関係を満足する 2 点を選び、それぞれの位置で剛体を振らせれば、同じ振動周期 T で振動する。このような振子を可逆振子という。

可逆振子においては、両支軸間 ($O - O'$ 間) の距離は相当単振子の長さ L に等しいから、その周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

となる。よって、

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \dots$$

となり、相当単振子の長さ L と周期 T を測定することで、 g の値を精密に求められる。

実験 ケーターの可逆振子は懸垂のためのエッジを 2 箇所持った振子 (エッジ間の距離は固定) で、重心の位置を移動させながら周期を測定し、2 箇所のエッジでの周期が一致したところで上記の理論を用いることができる。

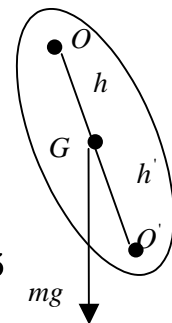


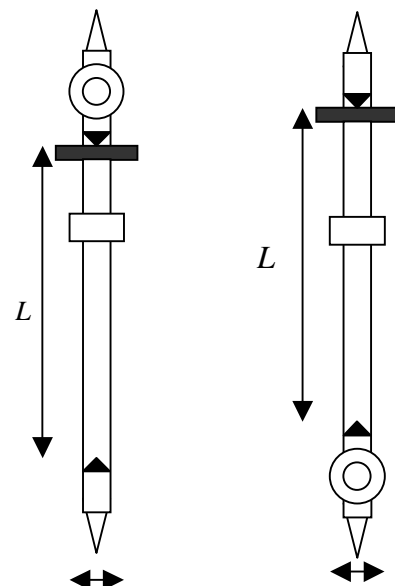
図 1 - 55



図 1 - 56 実験装置

重心の 目盛 h (cm)	での 周期 T (s)	での 周期 T (s)
15	2.018	2.013
20	2.013	2.011
25	2.008	2.008
30	2.004	2.008
35	1.998	2.006
40	2.000	2.006
45	2.001	2.006
50	2.002	2.005
55	2.003	2.006
60	2.005	2.007
65	2.005	2.008
70	2.013	2.010

表 1 - 2



$L = 100 \text{ cm}$ $T = 2.008 \text{ s}$ を 式へ代入

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 100}{2.008^2} = 978.1 \quad 978 \text{ cm/s}^2$$

参考：ブランコに乗っている人が自力で振幅を増すには？ 共鳴(共振)
 最も高い位置にいるときに腰を落とし、最下点に達する付近で腰を上げる。

<糸に吊るした球を使ったブランコ漕ぎの再現>

長い状態で最下点付近まで降りる。
 糸を引いて慣性モーメントを小さくする。
 これにより、角運動量保存則によって、
 角速度が大きくなる。
 の結果、球が大きく振れる
 振幅最大付近で糸を長く
 最下点まで振らせる。

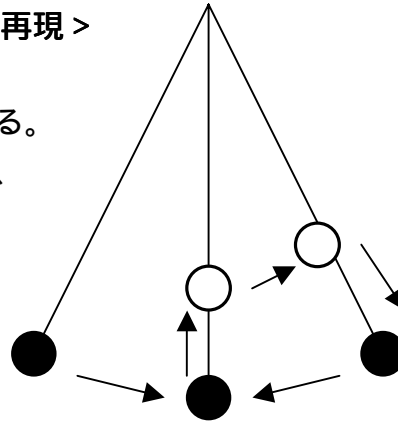


図 1 - 58

これは、振子が最下点に到達したとき振子の進行方向に撃力が加わったことに対応すると考えることができる。
 その結果、振子は外力のエネルギーを得て振幅が増大する。

§ 1.6 歳差運動

回転体の回転軸に方向を変えようとする外力がはたらくと、外力の方向に対して垂直の方向に軸がふれる。このふれは、回転体の角運動量と外力を合わせてできた力によって起こり、歳差運動（回転軸が時間とともに変化する運動）とよばれる。

歳差運動はコマなどで生じる首振り運動として見られる。

トルクは角速度ベクトルと直交している。

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{f}$$

質点の運動において

接線方向の力：速度の大きさを変化させる

法線方向の力：速度の方向を変化させる

この場合のトルク N_{\perp} は「角速度のベクトルの大きさではなく、方向を変化させる」と考えられる。

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \left(= \vec{\Omega} \times \vec{L} \right)$$

$$N_{\perp} = Mgl = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} = I\omega \cdot \frac{d\theta'}{dt} = I\omega \cdot \omega'$$

$$\therefore \omega' = \frac{Mgl}{I\omega}$$

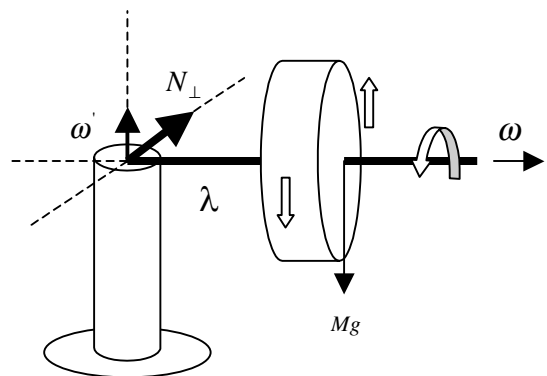


図 1 - 59 回転体を だけ右方向にずらしたと考える。

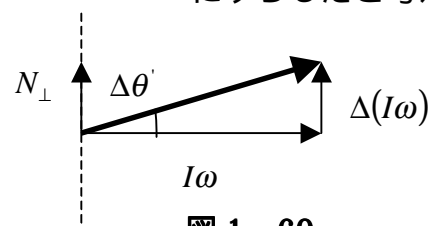


図 1 - 60

は軸の先端の回転ベクトルと考えるとわかりやすい

この場合

上から見て反時計回り

コマの回転速度が遅いほど、歳差運動の角速度 ω' は速い。

< N_{\perp} の方向のを見つけ方 >

回転体をずらしたということは Mgl という大きさの外力のモーメントが与えられる。これが N_{\perp}

右手系

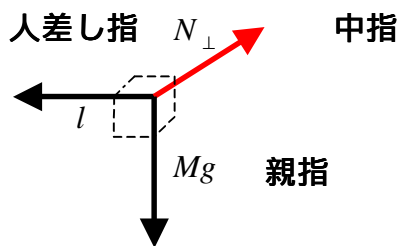


図 1 - 62



図 1 - 61



図 1 - 63

コマが 90° 傾いても落ちない

コマの運動

回転軸が固定されていない場合の運動

角運動量は $L = I\omega$ だが

$$dL = I\omega \cdot ndt$$

(n は軸の回転する角速度)

角運動量の変化率はトルクなので

$$\frac{dL}{dt} = N = \vec{r} \times \vec{f} = I\omega \cdot n$$

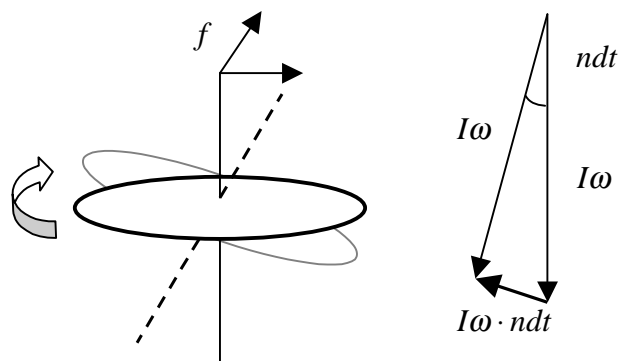


図 1 - 64

となる。

上式より同じトルク N を受けても、慣性モーメント $I\omega$ が大きい (コマ自身が速く回転している) 方が、軸の回転 n は遅い (全体の運動はゆっくり動く)。

つまり

速く進む自転車ほど倒れにくい

軸の一方を(床などに)固定した場合

右図のように先端が円周上を動くようになる。

歳差運動

(コマの重心にかかる重力と床の抗力がトルクを生む)

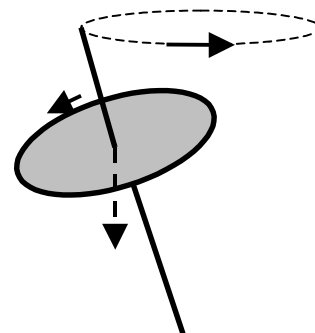


図 1 - 65

6 A) ジャイロスコープの歳差運動(島津製)

互いに垂直な軸の周りを回転できる3つの輪形の支持台でコマのように回る回転子を支え、回転子の回転軸が3次元のどの方向にも自由に動くような装置。回転儀とも言う。

ジャイロスコープの性質

回転ある軸が空間で一定方向を保つ(回転体の慣性)。

1度回転をはじめると、同じ平面とほぼ同じ回転軸で回転し続けようとする。

回転軸に垂直な力を加えると、回転軸は力の方向と垂直な方向に振れる(歳差運動)。

歳差運動の妨害に対しては反作用を生じない。



羅針盤の代わりとして利用される

図1-66 ジャイロスコープ

<<ジャイロスコープを使った実験例>>

図1のようにジャイロが回転している場合に、軸の先端に(おもりによって)トルクを加えてみると、どのように歳差運動するか？

力のモーメントと歳差運動の回転ベクトル、角運動量の方向関係より、上から見て時計回りに回転する。

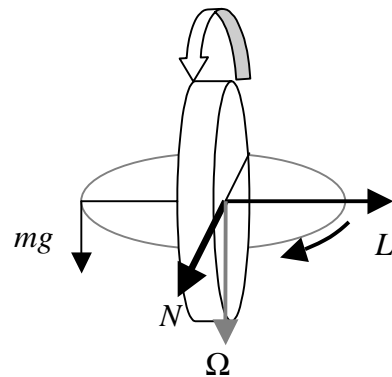


図1-67

$$\vec{N} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

$N = mk^2 \omega \Omega$ 歳差運動の回転速度はトルクが大きい(重いおもりの)方が速い。

§1.7 応力と歪み

実在する物体には、厳密な意味での剛体は無く、必ず外力が加わると変形を受ける。どんな物体でも、これに圧力を加えると、大なり小なり圧縮されるし、まげ、ねじり、引張りによって形を変える。

外力を与えたのち、これを取り去った後、完全にもとの体積ならび形に戻るような物体が**完全弾性体**で、外力を加えると、破壊こそしないが永久に形を変えてしまうような物体が**可塑性体**である。一般の物体は、弾性と可塑性との2つの性質を兼ね備えており、1つの物体でも、外力が小さい場合は弾的にふるまうが、外力がある程度を超すと可塑性が現れる。また、外力の加わっている時間が短ければ、弾的な性質を示すが、長ければ変形が伴って来て、外力の働いている間変形を続けるという物体

もある。外力が取り除かれた後、瞬時に原形に戻るものもあれば、非常に長時間を要するものもある。

7 A) 弾性余効 (力学歪み)

レーザーを用いてその直線性と距離の拡大によって正確にひずみを測ることができる。

プラスチック板の場合

おもりを下げると、レーザー光の指す位置はある程度急速に下がり、その後も少しずつ下がり続ける。

おもりを外すと、ゆっくり元の位置に戻る。

ガラス板の場合

おもりを下げると、レーザー光の指す位置は平衡位置まで下がり止まる。

おもりを外すと、元の位置にすぐ戻る。

銅板の場合

おもりを下げると、レーザー光の指す位置は平衡位置まで下がり止まる。

おもりを外すと、元の位置にすぐ戻る。

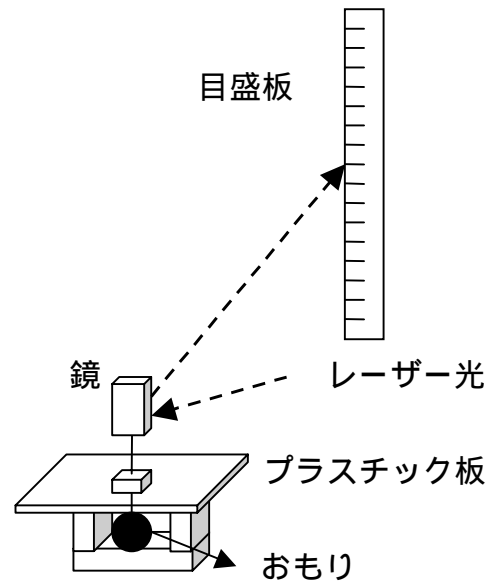


図 1 - 68

7 B) ポアソン比

矢印の部分にコルクを挟んで、少しずつ万力でコルクに圧力かける。

力を加えた物体の歪み、垂直方向の伸び。

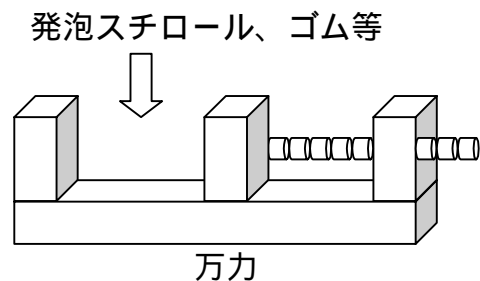


図 1 - 69

7 C) 剛性率

板をおもりで引っ張った時のスポンジの変形 (長さの変化) を測定し、剛性率を計算する。

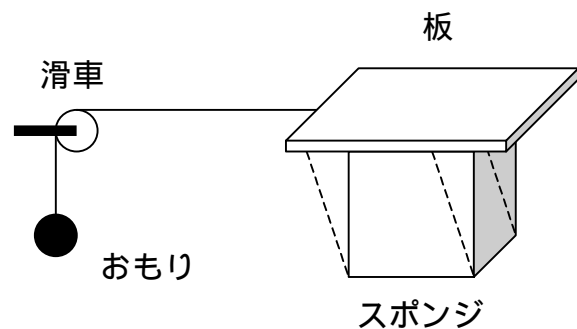


図 1 - 70

直六面体の上下両端面に、図 1 - 72 のように、平行な相等しい力 P を加えるとき、六面体は体積を変えずに、形のみひずみを受ける。これをズリという。この場合、上下両端面の面積を S 、その間隔を l 、その相対変位を Δl とすれば、ズリ応力は $p = P/S$ で表され、ズリの大きさはズリの角 ϕ 、つまり $p = P/S$ で表される。

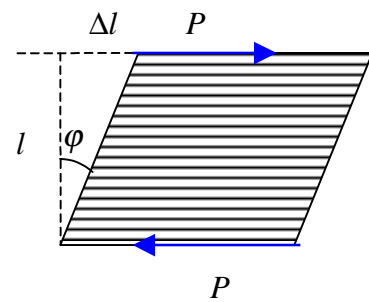


図 1 - 71 ズリひずみ

ズリがあまり大きくない場合、 ϕ は p に比例する (Hooke の法則)。この比例定数 n をその物質の剛性率または、ズリの弾性率という。

$$n = \frac{p}{\phi} = p / \left(\frac{\Delta l}{l} \right)$$

7 D) ねじり振子による剛性率の測定

式 $n = \frac{p}{\phi} = p / \left(\frac{\Delta l}{l} \right)$ にしたがって n を求める

ことは難しいが、以下のような方法を用いれば、便利に測定することができる。

図 1 - 72 のように、均質等方な長さ l 、半径 r の針金または円柱状の棒の上端を固定し、下端軸のまわりに偶力 N を加え、 θ だけねじるとき、に中心棒を多くの薄い円板の集合からなると考えれば、各円板面はそれぞれ棒の固定端からの距離に比例する角だけ回転し、各円板の上下端面は、相対的な回転のため少しずつズレている。つまり、ねじりのひずみはズリからなっている。そして、このときのねじりの角 θ は、外から加えられた偶力 (ねじり能率) N に比例し、その比例定数 c は次式で表される。

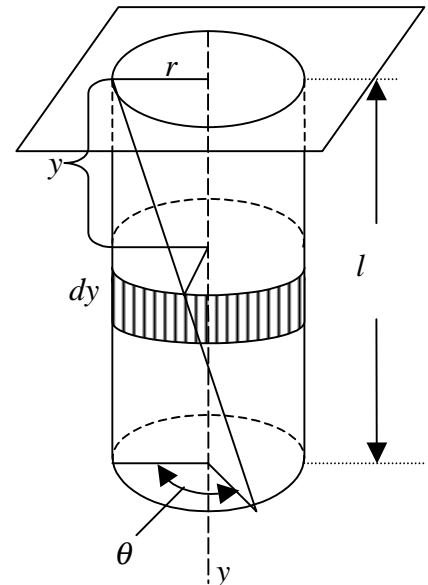


図 1 - 72

$$N = c\theta \quad \cdots \quad \text{ここで } c = \pi n r^4 / 2l$$

n : 針金(または棒)の剛性率 c : ねじり定数

よって、試料が円筒(または丸い棒)の場合は、直接式を用いて n を測定することもできるが、針金の場合は、ねじり振子を用いると便利である。(図 1 - 73)

ねじり振子は、針金の上端を固定し、下端におもりをつるし、これをねじって回転振動させるものである。針金のねじり係数を $c = \pi n r^4 / 2l$ とするとき、おもりがつり合いの位置から θ だけ回転した位置では、針金のねじりモーメントは $c\theta$ に等しいから、おもりの運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\theta \quad \dots \quad (c = \pi n r^4 / 2l)$$

となる。このとき、針金の質量は無視し、 I は回転軸のまわりのおもりの慣性モーメントとする。

よって、ねじり振子の運動は角単振動になり、その周期 T は次式で表される。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}} \quad \dots \quad \therefore n = \frac{8\pi l}{r^4} \frac{I}{T^2}$$

よって、おもりの慣性モーメント I が既知なら、周期 T を測って針金の剛性率 n が求められる。

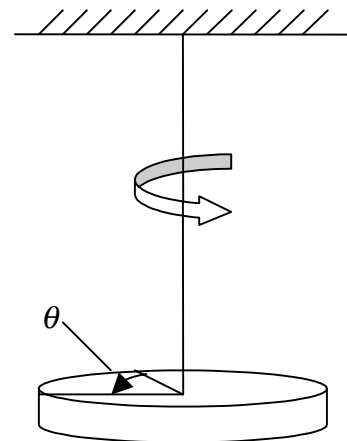


図 1 - 73

§ 1.8 流体の静力学

水や空気は固体と異なり、決まった形をもたず、外力を加えると流れていくので、液体と気体をまとめて流体とよんでいる。しかし、同じ流体でも、液体は一定の体積を持っているが、気体は一定の体積をもっていない。

気体は、分子間に結合力がなく、分子は互いに自由に飛び回っているため、容器内では、多数の気体分子が絶えず壁面に衝突して、力を及ぼしている。壁面の単位面積当たりのこの力が気体の圧力である。

一方、液体の中の静水圧は図 1 - 74 に示すように、水中の至る所で、下向きに働くばかりでなく、上向き、前後、左右にも同じ強さで等方的に働いている。これは、机の上に置いた物体が底面にだけしか圧力を及ぼさないのとは、大きく異なる。

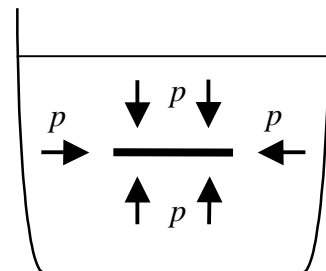


図 1 - 74 静水圧の等方性

面積 S [m²]に加わる力を F [N]とすると、単位面積当たりに働く力 p [N/m²]を圧力の強さ、または圧力という。これに対して、圧力と面積の積 pS を全圧とよび、 F で表す。

$$p = \frac{F}{S}$$

深さと圧力の関係

図 1 - 75 のように、密度 ρ [kg/m³]の液体の中で、断面積 S [m²]、高さ h [m]の液柱を考えると、液柱の上面には下向きの力 p_1S が、底面には上向きの力 p_2S が働き、液柱自身には重力 ρghS が下向きに働く。液柱が静止していることから、この3つの力はつり合っているため、次式が成り立つ。

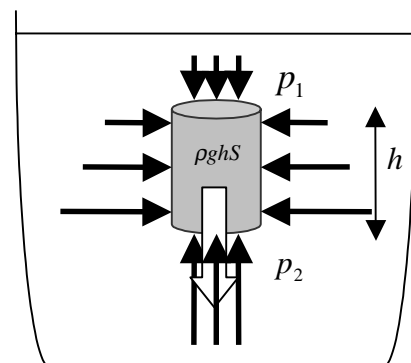


図 1 - 75 静水圧の変化

$$p_1S + \rho ghS = p_2S \quad p_2 = p_1 + \rho gh$$

したがって、深さが h だけ深くなると、圧力は ρgh だけ高くなり、底面積 S には関係しない。よって、液面から深さ h の点の圧力 p [N/m^2] は次式で与えられる。

$$p = \rho gh$$

液面に大気圧のような外圧 p_0 が働いていると、深さと圧力の関係は

$$p = p_0 + \rho gh$$

で与えられる。 圧力（水圧）は深さに比例して増大する。

水中にある右図のような物体において力の釣り合いを考えると、

$$p_1 dS = p_2 dS + \rho g(z_2 - z_1) dS$$

これより

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 = \text{const}$$

パスカルの原理

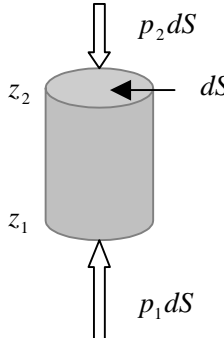


図 1 - 76

8 A) 浮沈子

ゴム膜を指で(強く)押すと、試験管が沈み、指を離すと浮き上がってくる。

原理: ゴム膜を押すとシリンダー内部の圧力が上昇し、この圧力が試験管にも伝わり、試験管内の空気が圧縮されその分水が入り込む。水が入り込んだ分、浮沈子が実質的に重く(浮力が小さく)なり、沈む。

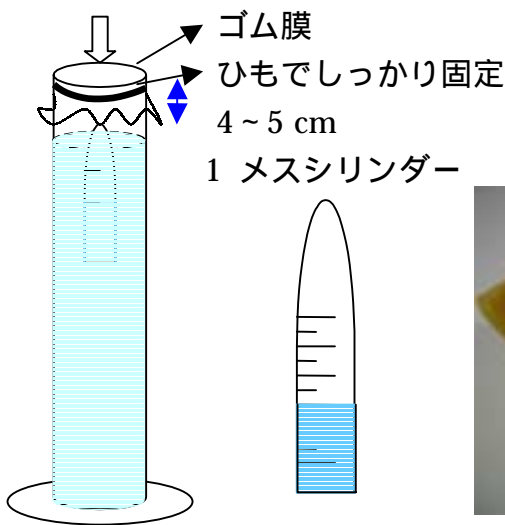


図 1 - 77



図 1 - 78 浮沈子

8 B) 管をつなぐと容器の水は速く流れ出る？
 底の部分に水の出口がある容器の中の水をできるだけ早く出すにはどのようにすればよいだろうか？

答え：出口の部分にホースをつなげる。
 （先端は出口より低い位置にすること）
 ホースが長いほど水は速く流れ出る。

理由：ホースが長いほど、高低差ができ出口の圧力が高くなるので、水はより速く流れ出る。

<確認方法>

まず、容器の蛇口を開いたときに一定量の水が流出する時間を測定する。次に蛇口部分にホースをつなげて同様の実験を行う。



図 1 - 79 流水時間測定用容器

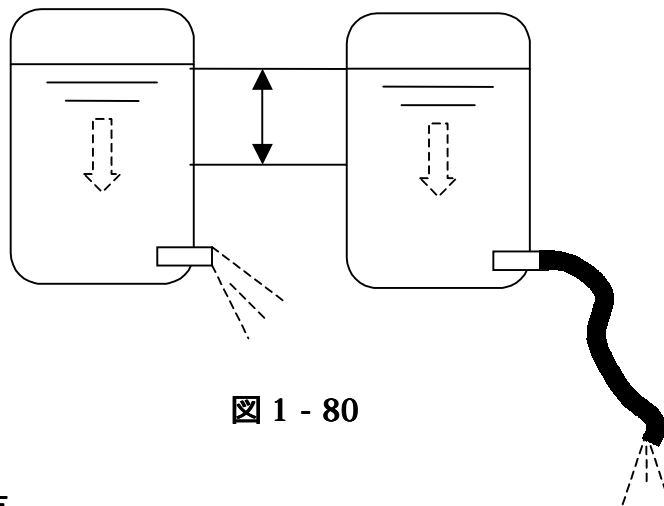


図 1 - 80

流体の流れ方

静止している流体の一点にかかる圧力は、四方八方から均等の大きさで作用して方向性をもたないので、流れは生じない。

流れを起こすためには、空間的な圧力差(圧力勾配)が必要。

<完全流体の場合>

流体の流れの中に引いた曲線で、各点での流れの方向がその点での曲線の接線になっているものを、**流線**という(図 1 - 81)。

各点における流れの速度が一義的に決まり、流線が時間的に変化しない流れを「**定常**」であるという。

定常流の中に小さな面積を考え、そこを通過する流線を作ると**流管**(1つの管：tube of flow)が

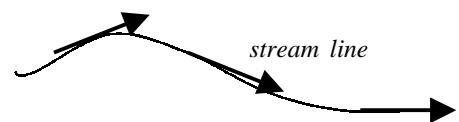


図 1 - 81

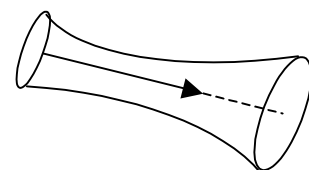


図 1 - 82

できる(図 1 - 82)。

流線は交わったり、流管の外にはみ出すことはない！

連続の原理

図 1 - 83 のような給水バルブに太さの違うパイプをつなぎ水を流す。(このとき水の流れは乱れのない層流で定常流であるとする。)

管内の流れに沿った 2 点 A・A' を考え、A における管の断面積を S、A' の断面を S' とすると、単位時間に A と A' を通過する水の量は等しい。

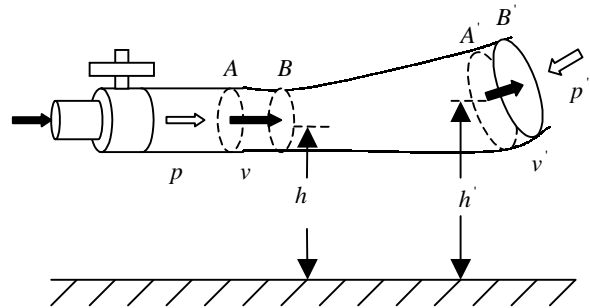


図 1 - 83

断面 A・A' における平均流速をそれぞれ v , v' とすると

$$vS = v'S'$$

断面内で流速分布を考えるときは積分して $\int v dS = \int v' dS'$

すなわち $\int v dS = const$ これを連続の定理という。

また $\int v dS$ を流量とよぶ。

流体の流れる速度は断面積に反比例するので、図のように断面積の小さなところ A では流速は速くなる。

ベルヌーイの定理：流速に差ができると圧力が変化する

図 1 - 84 で水が流れる方向をプラスにして考える。

管内の A と A' の面に働く力はそれぞれ pS , $-p'S'$ なので、 dt 時間内に A と A' の間にある

水になされる仕事 W は

$$W = p S v dt - p' S' v' dt \dots$$

となる。 dt 時間内に管内の A にあった水は B まで、A' にあった水は B' まで進んだとすると、仕事 W は AA' 間にあった水が dt 時間の間に BB' の位置へ移動するまでに得たエネルギー（運動エネルギー + 位置エネルギー）の増加分。

つまり

$$W = (\text{BB' 間の水のエネルギー}) - (\text{AA' 間の水のエネルギー})$$

また、BA' 間は共通なので、

$$W = (\text{A' B' 間の水のエネルギー}) - (\text{AB 間の水のエネルギー})$$

$$= \rho S' v' dt \left(\frac{v'^2}{2} + gh' \right) - \rho S v dt \left(\frac{v^2}{2} + gh \right) \dots$$

となる。 < dt 内にされた仕事 = 得たエネルギー > なので、
これに連続の定理の式 $vS = v'S'$ を使うと

$$(p - p') S v dt = \rho \left\{ \left(\frac{v'^2}{2} + gh' \right) - \left(\frac{v^2}{2} + gh \right) \right\} S v dt$$

よって

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = p' + \frac{1}{2} \rho v'^2 + \rho g h' = \text{const.}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 圧力 単位体積の流体の位置エネルギー
 単位体積の流体の運動エネルギー

が得られる。

これをベルヌーイの定理という。

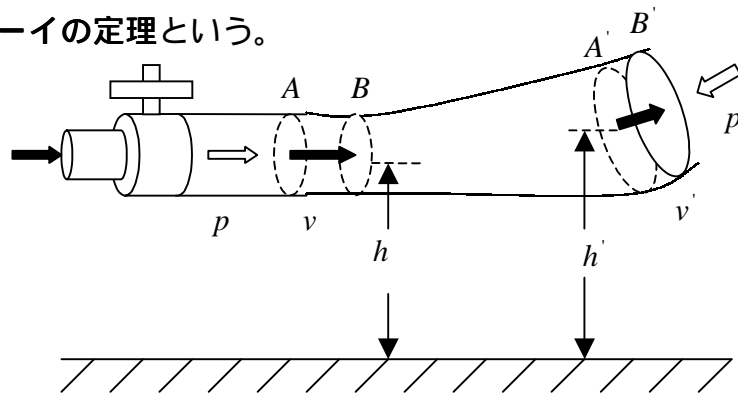


図 1 - 84

8 C) 穴の開いた水槽から飛び出す水はどこまで飛ぶか？

図 1 - 85 のように側面に穴を開けた容器に水を入れ
ると、水は水圧によって側面から噴出し、その勢いは
下の穴ほど強くなる。

穴から飛び出す水は、実際にどれくらい飛ぶのかを
考える。

穴の位置を水面から h_1 の深さ、底から h_2 の高さ
にあるとすると、穴から飛び出す水の速度は
ベルヌーイの定理より

$$\rho g h_1 = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{より} \quad v = \sqrt{2gh_1}$$

で、水平に飛び出す。その先は自由落下なので

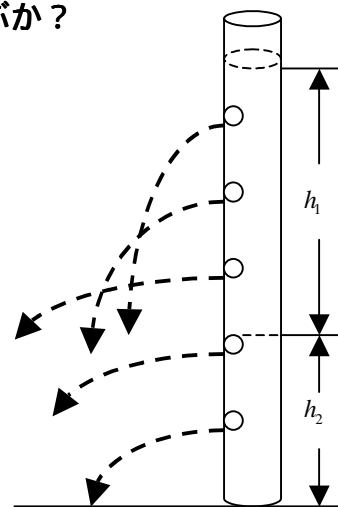


図 1 - 85 水深と水圧

$$x = v_0 t \quad (v = v_0)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} g t^2$$

上の3式を解くと

$$x = 2\sqrt{h_1 h_2}$$

となる。

今、底から水面までの高さ ($h_1 + h_2$) が一定とすると

$$h_1 = h_2$$

の場合が最も遠くまで飛ぶ。

図1-85では下から3番目の穴からが最も遠くまで飛ぶ。



図1-86 筒状水槽

§1.9 表面張力と毛管現象

表面張力：液体が持っている表面をできるだけ小さくしようとする性質。

液体の分子間力(凝集力)が、その表面でとぎれてしまい、その結果分子を内側に取り込もうとする力になったもの。

液体の表面に並行に液面上の単位長さの線に直角に働く応力として表される。

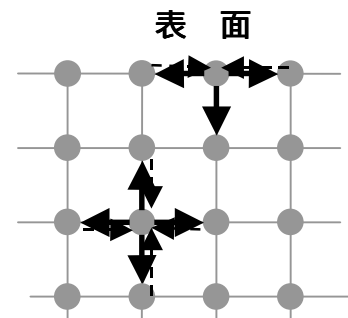


図1-87 表面張力

赤い力が残り、この結果表面ができるだけ小さくなるような形状をとることになる。

定義

液体の表面積を dS だけ増やすのに必要な仕事を dW としたとき

$$dW = T \cdot dS$$

このときの T を表面張力という。 単位：[N/m] (単位長さあたりの力)

9 A) 石けん膜の作る最小表面積

(1) 円環内に張った糸

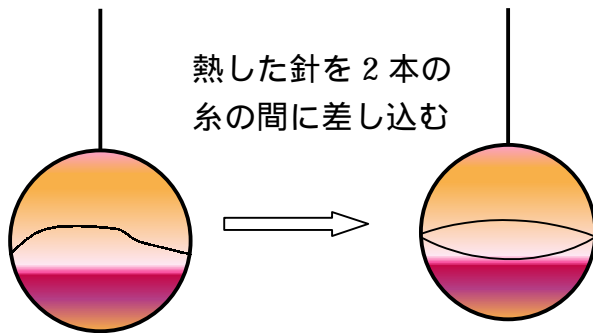


図 1 - 88

糸は上下方向に分かれる。
中央部分は空洞になるが、上下部分は石けん膜が張っている。

(2) 針金で作ったいろんな形状にできる石けん膜



図 1 - 89



図 1 - 90



図 1 - 91



図 1 - 92



図 1 - 93

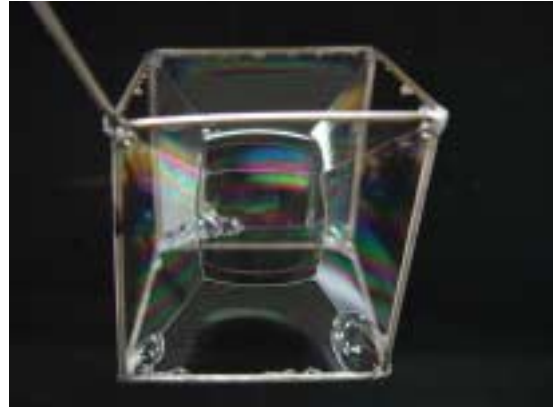


図 1 - 94

すべての場合において、**表面張力**によって表面積が極小になるように石けん膜ができる。

9 B) 屏風 < 毛細管現象 >

くさび型にした2枚のガラス板の間に吸い上げられる水。

図 1 - 95 のように変数を定めると、ガラス間の間隔 d と液面の高さ y は

$$d = 2x \tan \alpha \quad y = \frac{2T \cos \theta}{\rho g d}$$

と表される。これらより d を消去すると

$$xy = \frac{T \cos \theta}{\rho g \tan \alpha}$$

となり、**双曲線**になることがわかる。

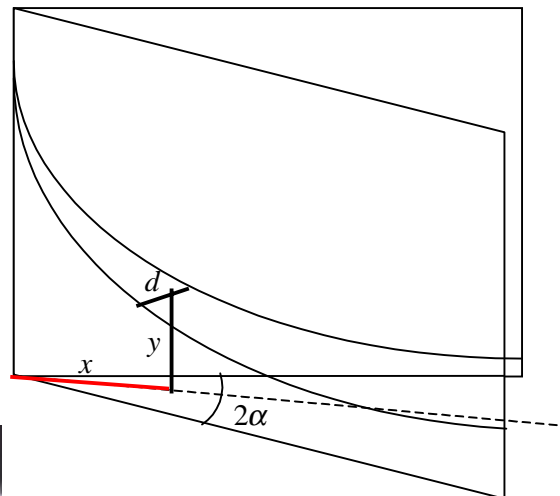


図 1 - 95

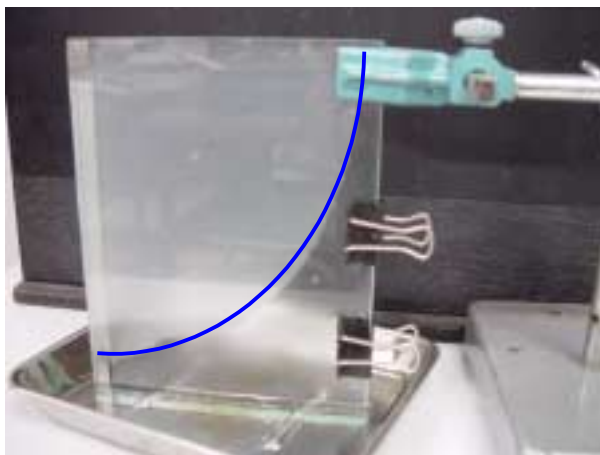


図 1 - 96

9 C) 親水性物質同士、疎水性物質同士は引き合い、親水性物質と疎水性物質は反発する

ガラス棒と電球は引き合う
 ガラス棒を電球から離すと、電球はガラス棒を追っかけて近づこうとする。

ガラス棒と樹脂円筒は反発する
 ガラス棒を樹脂円筒に近づけると、樹脂円筒はガラス棒から遠ざかる。

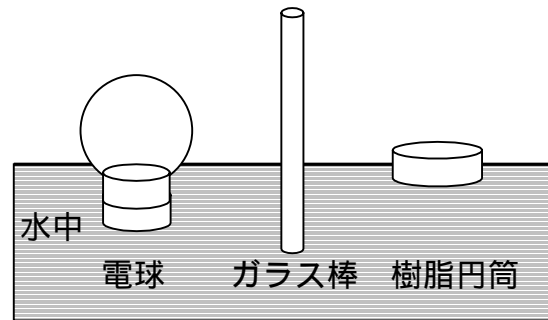


図 1 - 97

§ 1.10 運動する流体 (風速計: 島津製)

10 A) 翼の揚力

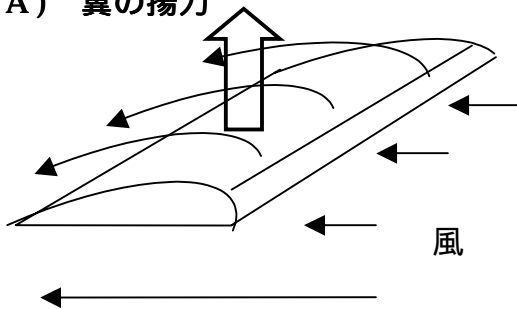


図 1 - 98



図 1 - 99

図 1 - 98、99 のように翼に風を送ると、翼の上の方の風速が速くなる。これによって上の方の圧力が下がり、翼が上向きに傾く。これが揚力 (飛行機が飛ぶための力) になる。

10 A) 落ちないピンポン玉

吹き出す空気の上にピンポン玉を持っていくと、図 1 - 100 のような状態で安定してピンポン玉は落ちることはない。

もし、ピンポン玉が図 1 - 101 のように中心部分からやや左にずれると、右側の部分に空気の流れが集中し、圧力が下がる。この結果、ピンポン玉は左から右方向に押され、元の状態 (図 1 - 100) に戻る。

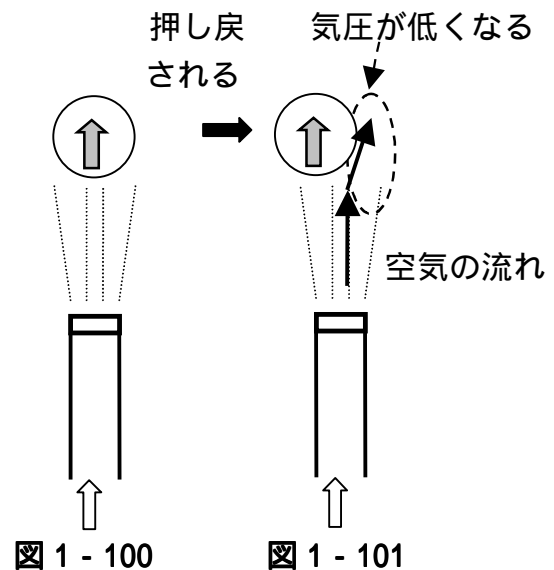


図 1 - 100

図 1 - 101

10 B) 風洞実験（島津製）

様々な形状のものに発生する乱流を調べる。



図 1 - 102

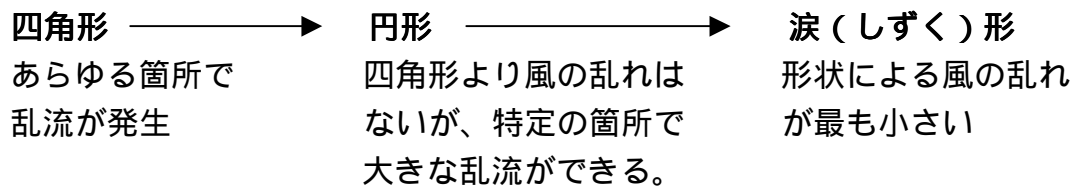


図 1 - 103



図 1 - 104

乱流の激しい順序（図 1 - 104）



このような風洞実験によって自動車の形状等の研究がされている。

