第1章　力と運動

§1.1　ニュートンの運動の法則

物体の運動について研究を行っていたガリレイは、滑らかな地面を転がる球はどこまでも転がると考えた。一方、ニュートンは力が働かない物体はいつまでも同じ運動を続けると考えた。ニュートンは運動状態が変化するのは力が働くからだと考え、運動の法則に到達した。つまり、物体が運動するときの規則性がなぜ生じるかを明らかにしたのである。こうして物体に働く力と運動の関係を扱う力学が生まれた。そして、私達が観察できるどのような物体の運動もニュートンの運動の３法則に従っている。

ニュートンの運動の法則（３法則）について

（1）運動の第１法則（慣性の法則）

物体には慣性があり、他から力を受けないとき、静止している物体は静止を続け運動している物体は等速度運動を続ける。

（2）運動の第２法則（運動の法則）

質量 m の物体が力 F を受けると加速度 a を生じ、次の運動方程式が成り立つ。

$$F = ma$$

これを解けば物体の運動状態が決まる。

＜参考：質量 1kg の物体に 1N の力が働くと 1m/s^2 の加速度を生じる＞

（3）運動の第３法則（作用・反作用の法則）

２つの物体が力を及ぼし合うとき、それらの力は大きさと方向がおなじで向きが逆向きである。

これを検証もしくは体験するための実験をつぎにあげる。

1 ‐A)　作用反作用をはかりで見る

下図のように固定の柱、ばねばかり、滑車、錘を配置する。各部には作用・反作用の原理に従い、重力 mg と張力 T が釣り合う。錘を 2 倍にして見よ。夫々の力がばねばかりが示すように２倍になるであろう。

図 1−1 のように片側を棒にばねばかりを固定し、他方は滑車にかけておもりをつるす。このときばねばかりは 500g を示す。

次に、図 1−1 と同じおもりを 2 個使って、 図 1−2 のようにばねばかりの両端を滑車にかけおもりをつるした。このときのばねばかりの目盛は図 1 と同じ 500g を示す。

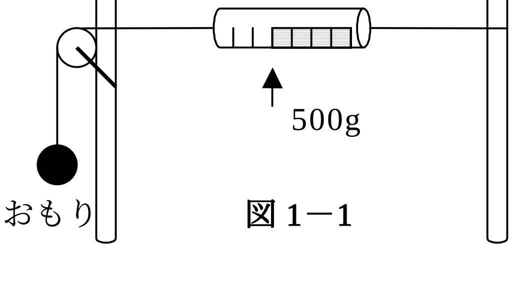


図 1−1

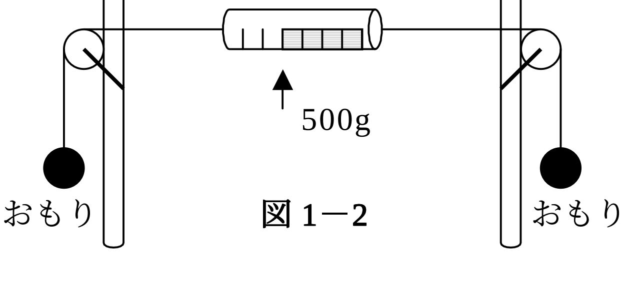


図 1−2

1－B)　浮力による作用反作用

重さを量るはかりに水の入ったピーカーを置く。力と目盛りは比例し、はかりの目盛りは重力を示す(図１－3)。

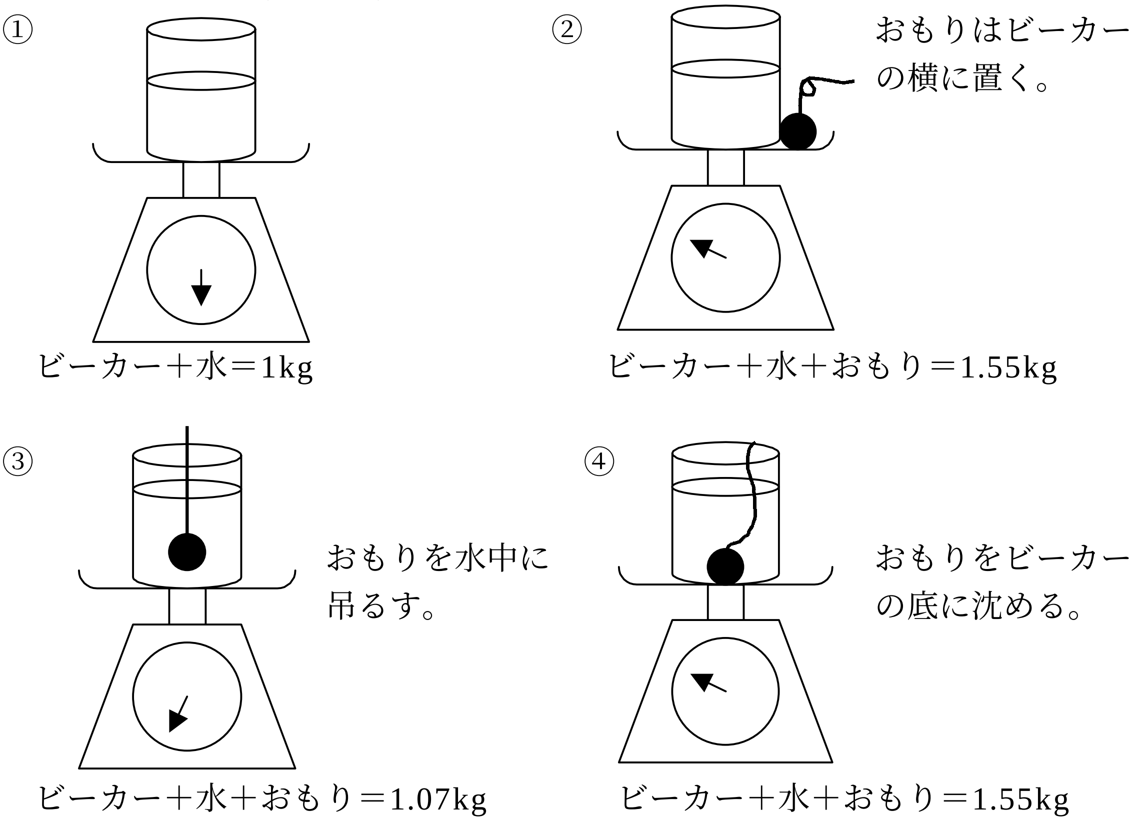


図１－3　浮力による作用・反作用

④の表示　マイナス③の表示は水の浮力を表し、水の密度はほぼ１.0g/㎠^{3}であるからこれは物体の体積に等しい。これより物体の比重が計算される。

§1.2　摩擦

<u>摩擦について</u>

水平に物体を引っ張るときの摩擦力を図１で表す。鉛直方向に重力(作用)と抗力N(反作用)が釣り合っている。水平方向に引っ張る力を f とすると反対方向の摩擦力F で表す。 f を増して行くと物体が滑り出す直前の最大摩擦力 F_m となり f がこれより大きくなると物体が動き出すことになる。

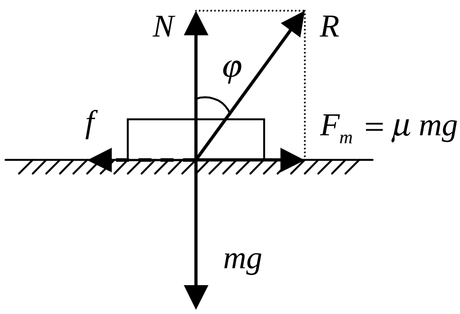


図１－4　摩擦力

$F_m = \mu\, mg$　と表され、μ は摩擦係数と呼ばれる。またF_mは静止摩擦力である。運動摩擦には“ すべり摩擦 ”と“ ころがり摩擦 ”があり前者に比べて後者ははるかに小さい。

2 ‐A） 摩擦角（島津製）

図1―5の斜面の角度を徐々に大きくしていくと斜面上の物体が滑り始める。このときの角度を摩擦角という。

$$N = mg\cos\theta$$

$$\mu N = mg\sin\theta$$

$$\therefore\ \mu = \tan\theta$$

参考）45°のときμ　1

図1―5

ゴム面・・・約34°

木の面・・・約28°

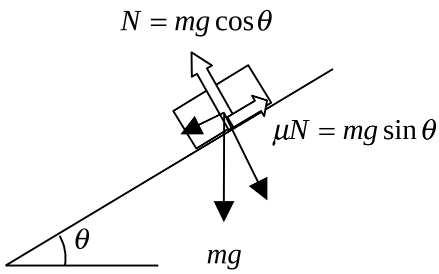


図1―6　摩擦角

§1.3　衝突 ＜エネルギー保存と運動量保存則＞

2つの物体、それぞれの質量m_1とm_2が弾性衝突するときにその後の運動を予測するには、エネルギーと運動量の保存を考慮する。エネルギーを保存しない場合を非弾性衝突と呼んでいる。

仕事とエネルギー

仕事：物体に力を加え、物体が力の向きに動いたとき‘仕事をした’といい、Wで表す。
加えた力をF、力と変位のなす角をθ、移動距離をsとすると

$$W = Fs\cos\theta$$

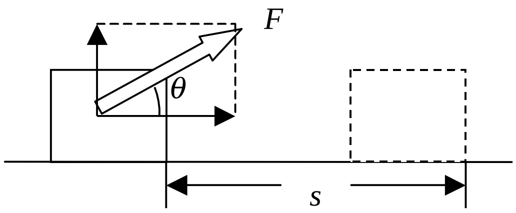


図1―7　仕事

$0^\circ \le \theta < 90^\circ$のとき：力は物体に正の仕事をする

$\theta = 90^\circ$のとき：力は物体に仕事をしない

$90^\circ \le \theta < 180^\circ$のとき：力は物体に負の仕事をする

単位）1Nの力を加えて力の向きに物体を1m動かしたときの仕事：1J（SI単位）

＜例＞質量 m の物体が距離 s だけ動いたときにした仕事 W

（はじめの速度を v_1、移動後の速度を v_2 とする）

$$W = Fs$$

$$f = m\alpha = \pm F$$

$$\alpha = \frac{v_2 \pm v_1}{\Delta t}$$

$$s = \frac{(v_2 + v_1)}{2} \cdot \Delta t$$

$$\therefore \quad W = \pm m \frac{v_2 \pm v_1}{\Delta t} \cdot \frac{(v_2 + v_1)}{2} \cdot \Delta t$$

$$= \frac{1}{2} m\left(v_1^2 \pm v_2^2\right)$$

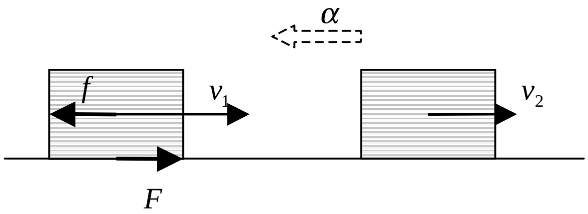


図 1－8　仕事とエネルギー

F：物体が床に与える力

f：物体が床からうける力

となる。運動する物体は、$(1/2)mv^2$ の仕事を与える能力があると見なせる。これを“運動エネルギー”という。

エネルギー：物体が(持っている)仕事をする能力

① 位置エネルギー U ：$U = mgh$

② 運動エネルギー K ：$K = \frac{1}{2}mv^2$

③ 弾性エネルギー W ：$W = \frac{1}{2}kx^2$

働く力が保存力だけのときは、エネルギーは保存される。

経路によらないような力（重力、弾性力など）

☆（力学的）エネルギーが保存されていることの例

等加速度運動（重力）の場合

$$h_1 = \pm \frac{1}{2}\alpha t^2 \pm v_0 t + h_0 \qquad 、 \qquad \pm v = \pm v_0 \pm \alpha t$$

t を消去して

$$v^2 \pm v_0^2 = 2\alpha(h_0 \pm h_1)$$

両辺に $m/2$ を掛けて、$\alpha = g$ とすると

$$\frac{1}{2}mv^2 \pm \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h_0 \pm h_1)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

となる。これより力学的エネルギーが保存されていることがわかる。

運動量保存の法則

1．運動量：運動する物体の運動の勢い

質量 m の物体が v の速さで運動しているとき、運動量の大きさ p は

$$p = mv$$

で定義される。一方、一般に運動量はベクトル量だと考えるので、質量 m の物体が $\vec{v}$ の速度で運動しているとき、運動量 $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

である。＜単位) kg・m/s＞

2．力積：力 $\vec{F}$ とその力の働いた(微小)時間 Δt との積 $\vec{F}\Delta t$　　単位）N·s

3．運動量と力積

物体の運動量の変化はその間に物体が受けた力積に等しい。

質量 m の物体が、図 1―9 のように一直線上を速度 $\vec{v}$ で運動している。この物体に、直線に沿って一定の力 $\vec{F}$ が Δt 間働き、物体に速度が $\vec{v}'$ に変わったとする。

物体の加速度 $\vec{a}$ は一定で $\vec{a} = \dfrac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t}$ なので、

運動方程式は

$$\frac{m\vec{v}' - m\vec{v}}{\Delta t} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad \boxed{m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{F}\Delta t}$$

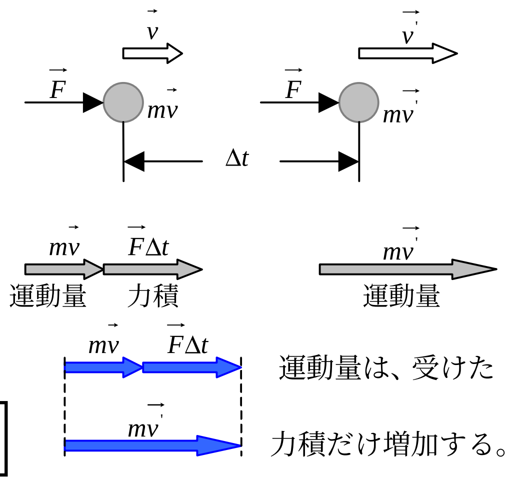


図 1―9　運動量と力積

となり、運動量の変化は物体が受けた力積に等しい。

4．運動量保存の法則

右図のような衝突を考えると、

$$m\vec{v}_1' - m\vec{v}_1 = -\vec{F}\Delta t \quad 、\quad m\vec{v}_2' - m\vec{v}_2 = \vec{F}\Delta t$$

となり、作用反作用の法則を用いて $\vec{F}\Delta t$ を消去すると、

$$\boxed{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2'}$$

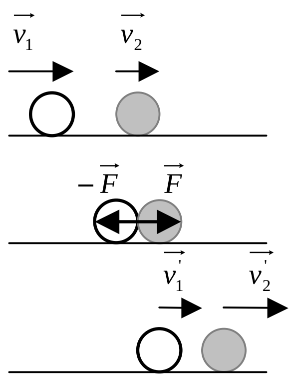


図 1―10　運動量保存の法則

となる。→２つの物体の運動量の和が衝突の前後で変わらない。

⇩ 総運動量は変化しない（保存される）

運動量保存の法則

★反発係数（跳ね返り係数）：2 球の衝突

→ 衝突前の速さに対する衝突後の速さの比e

$$e=-\frac{v_1'}{v_1} \qquad 0\le e\le 1$$

2 球の衝突の場合：$e=-\dfrac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$

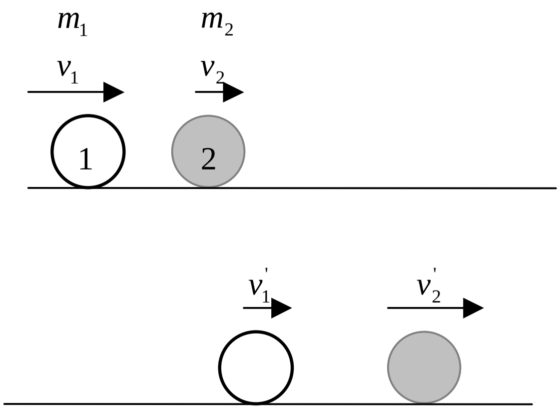


図 1－11　反発係数

図 1－11 のような 2 球の衝突を考える。

運動量保存則より

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

衝突係数

$$e=-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$$

上の２式より衝突後の各球の速度は

$$v_1'=\frac{(m_1-em_2)v_1+m_2(1+e)v_2}{m_1+m_2} \quad \rightarrow \text{ さらに変形すると } \quad v_1'=v_1-\frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}(v_1-v_2)$$

$$v_2'=\frac{m_1(1+e)v_1+(m_2-em_1)v_2}{m_1+m_2} \quad \rightarrow \text{ さらに変形すると } \quad v_2'=v_2+\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}(v_1-v_2)$$

ここで、衝突がおきるためには $v_1-v_2>0$ でなければならない。

また、$v_1'\le v_1$ ， $v_2'\ge v_2$ ， $v_1'\le v_2'$ である。

$m_1=m_2$ で $e=1$ であれば、

$v_1'=v_2$ ， $v_2'=v_1$ となり、**速度交換**が行われる。（$v_2=0$の場合は$v_1'=0$）

また、$v_2=0$ であれば $v_1'=\dfrac{m_1-m_2e}{m_1+m_2}v_1$ で 、$m_1-m_2e<0$ ならば、**1 の球は跳ね返される。**

$e<1$のときは、力学的エネルギーは保存されない。

3 ‐Ａ）　斜面を転がる２つの球

図１―12　実験装置全体図

図１―13　衝突箇所拡大図

図 1―14 のように斜面から剛球ａを滑らせると、剛球は A の位置からは放物運動をして、地面に落下する。

もし、あらかじめ A の位置に斜面を滑らせる剛球ａと同じ条件（ma = mb）の剛球ｂを置き、ａをｂに衝突させたとき、それぞれの剛球はどのような運動をするのか？

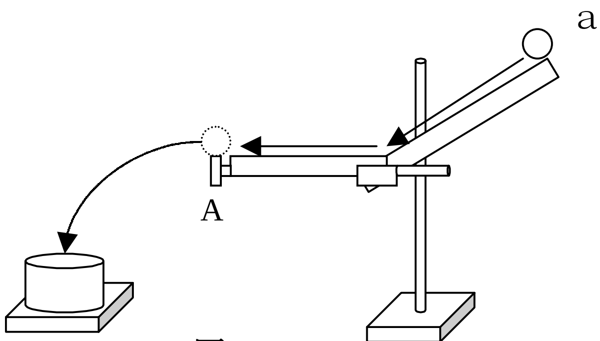
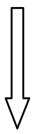


図１―14



A に別の剛球を置いて衝突させたときのａとｂの運動の様子

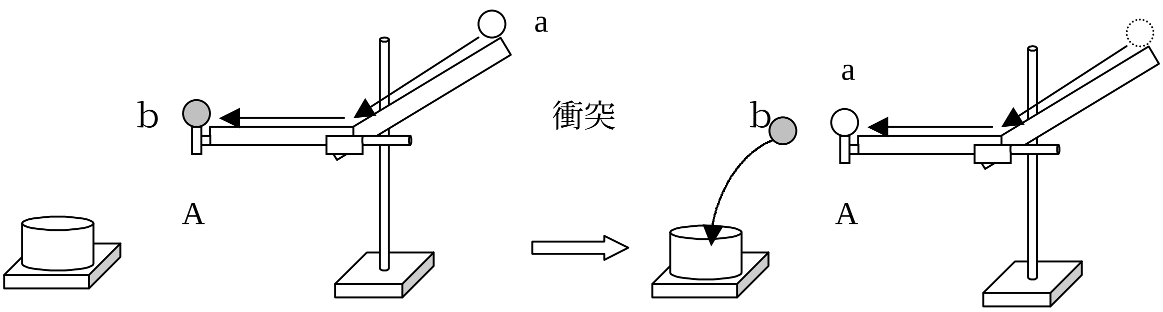


図１―15　　　図１―16

A の位置で剛球ａとｂが衝突するとａの持っている（力学的）エネルギーがｂに移動し、ａの代わりに図 1 と同じ位置に落下する。また、ａは A の位置で停止する。（図 1―16）

（設問）各自、運動量保存と完全弾性衝突(エネルギー保存)で導く。

３ ‐Ｂ） 弾丸の速度測定実験

(1)弾丸および振り子部分の重さを量っておく。弾丸：m　振り子：M

(2)弾丸を発射し、振り子部分の移動距離を測定する。

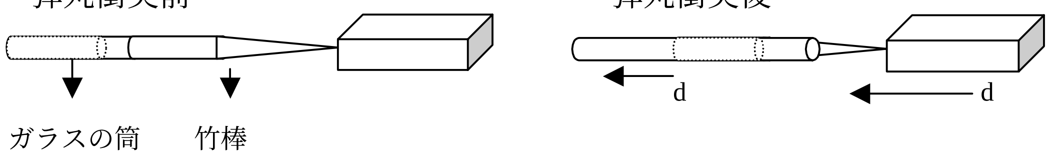


図１－17　振り子部分の移動距離の測定方法

弾丸が衝突して振り子が動いた分だけ竹の棒も動く。動いた長さを振り子の横軸方向の移動距離 d とする。

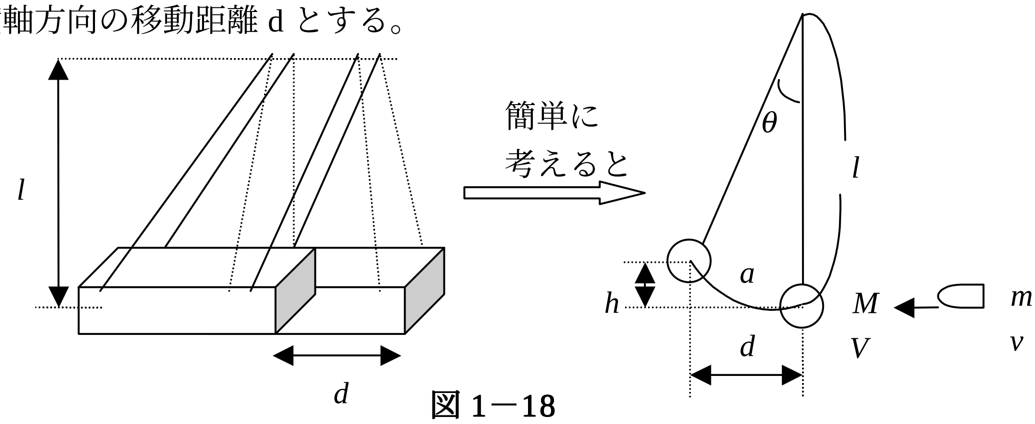


図１－18

(3)以上の測定値により弾丸が振り子に衝突する瞬間の速度が算出できる。

衝突前後での運動量の保存則より　$mv = (M+m)V \Lambda$ ①

衝突後の振り子のエネルギー保存則より　$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh \Lambda$ ②

②より　$V = \sqrt{2gh}\,\Lambda$ ③

③に　$h = l(1-\cos\theta)$　，$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$　を代入

$$V = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{gl}$$

θ：小さいなら　$\sin\theta$　θ　　l：大なら　θl　a　d　　と考えると

$$V = 2\cdot\frac{\theta}{2}\sqrt{gl}$$

$$= \frac{d}{l}\sqrt{gl}$$

$$= d\sqrt{\frac{g}{l}}\,\Lambda \text{ ④}$$

①に④で算出したＶとあらかじめ測定しておいたＭとｍの値を代入することで、振り子に衝突する瞬間の弾丸の速度が求められる。

実験値：M ＝810 g　m ＝13.7 g　　＝75 cm　d ＝10 cm　g ＝980 cm／s^2　より

$$V = 10 \cdot \sqrt{\frac{980}{75}} = 36.14 \quad 36\ (\mathrm{m/s})$$

$$13.7 \cdot v = (810 + 13.7) \cdot 36 \qquad v = 2164.4 \quad 2200\ (\mathrm{m/s}) = 22\ (\mathrm{m/s})$$

図１－19 実験装置全体

図１－20 弾丸発射装置部分

図１－21 弾丸受け取り用振り子部分

図１－22 振り子の移動距離測定部分

振り子の端に竹の棒が接するようにセットする。

3 －C） モンキーハンティング

速度独立（重力に対する水平方向と鉛直方向の速度は独立していること）を検証する実験。

ハンターが狙った木にぶらさがったサルを打ち落とそうと銃を発射する。音に驚いてサルが発射と同時に木から手を離して落ちても必ず命中する。

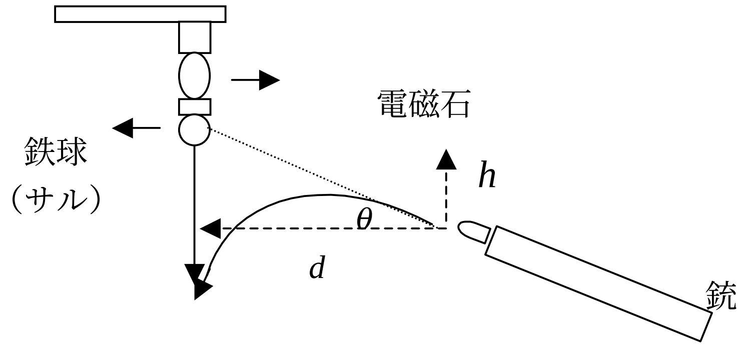


図 1－23

弾丸の初速を v_x, v_y とし、サルは h の高さにおり、水平方向に d だけ離れているとする。銃を向ける角度を θ とすると

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{h}{d}$$

また銃弾がサルのいる（水平）位置まで達する時間を t とし、y 座標を調べると

$$d = v_x \cdot t$$

$$y_m = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{（サルの } y \text{ 座標）}$$

$$y_b = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{（弾丸の } y \text{ 座標）}$$

ところが

$$v_y t = \frac{h \cdot v_x}{d} t = h$$

となり必ず命中する。

＜実験装置＞

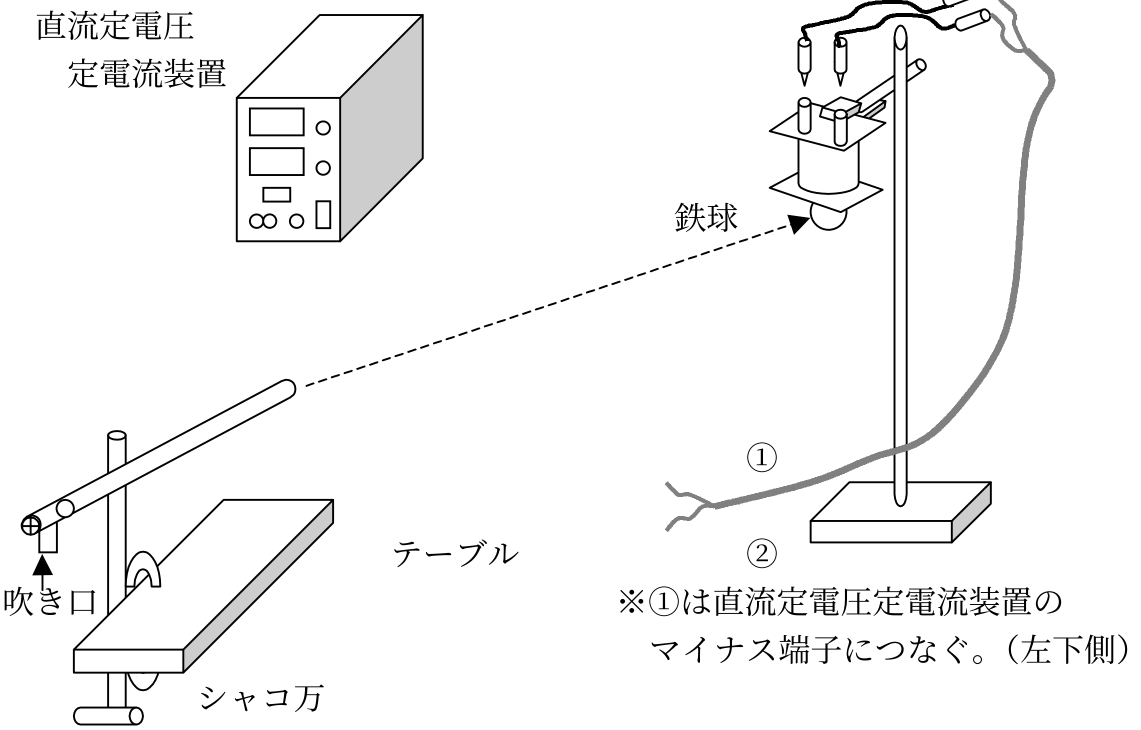


図 1－24　実験装置配置図

注意）直流定電圧定電流装置の電流の値は 0.5A 位に設定する。
このとき、電圧の値は０からほんの少し上げる程度で良い。

図 1－25 実験装置全体

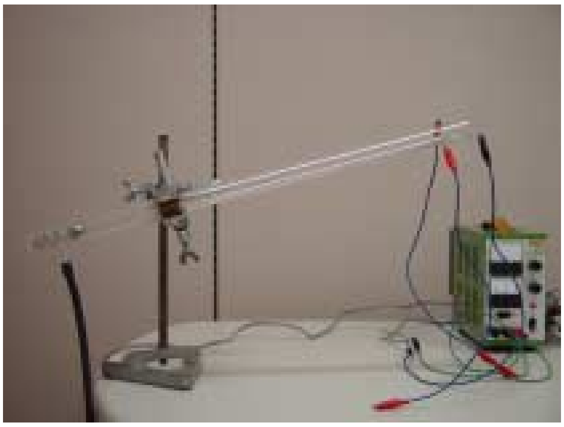


図 1－26 弾丸（鉄球）発射装置＜銃＞

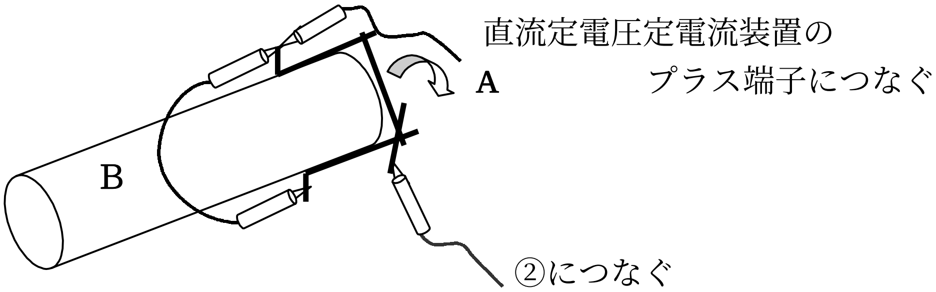


図 1－27　銃口部分の拡大図

注意) 弾丸にする鉄球を銃の中に入れるときは、回路とは別に B のように接続しておく。
→（理由）鉄球を投入するために A を開くことによる回路切断を暫定的に防ぐため
＜もし接続し忘れると、電磁石にぶら下げている鉄球が落ちてしまう＞

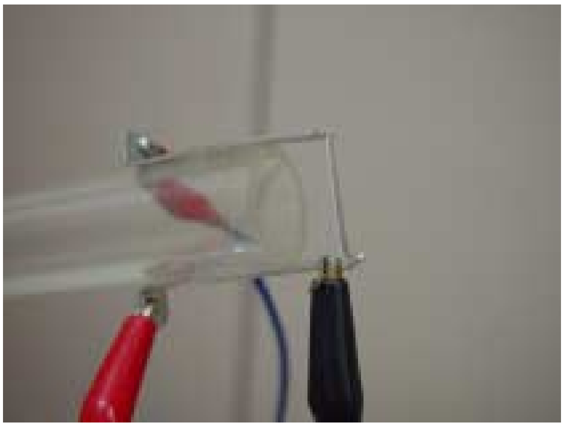


図 1－28 銃口部分の拡大（その 1）

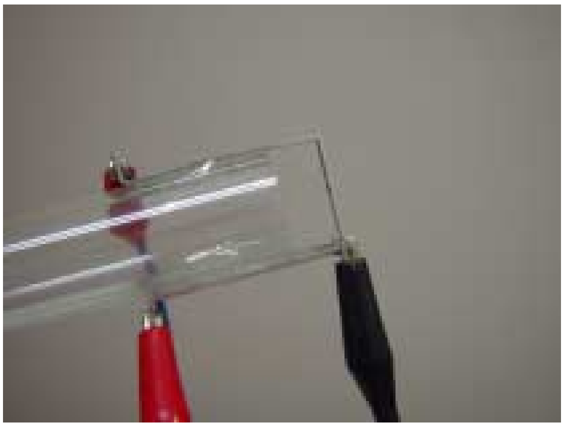


図 1－29 銃口部分の拡大（その 2）

＜装置のしくみ＞

弾丸が銃から発射される際 A が開き、この瞬間回路が切断されることにより、電磁石にぶら下がっている鉄球が落下を始める。

＜その他＞

図 1－30 鉄球（サル）保持の電磁石

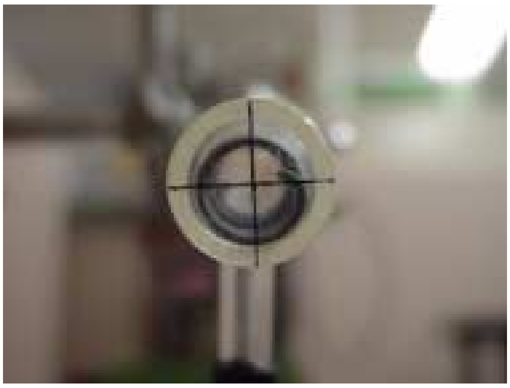


図 1－31 焦点を合わせるための標線

＜参考：自分を持ち上げることはできるか？＞

図 1－32 のように滑車を付けた板の上に乗り、天井から滑車を通したひもを引くことで自分自身を持ち上げる(板を浮かせる)ことができるのだろうか？

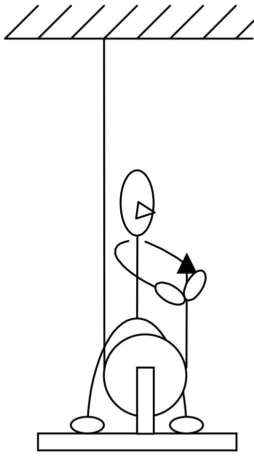


図 1－32

止まっていた電車が急に動き出すと、つり革は電車が動き出した向きと反対向きに傾く。このつり革の動きは、電車の外にいる（地上に静止している）人が見た場合と、電車の中にいる人が見た場合で考え方が違う。この動きについて考えてみる。

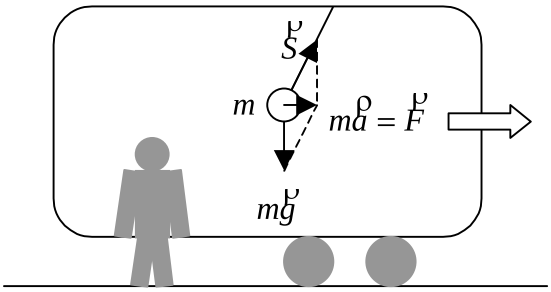


図 1－33

電車の外にいる人が観測者の場合
静止している

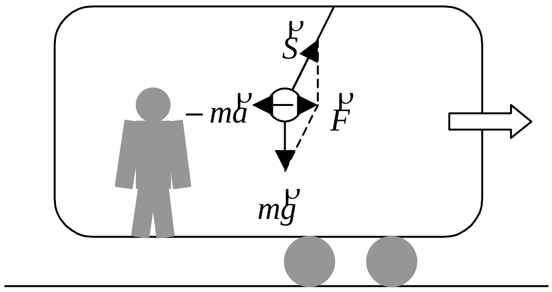


図 1－34

電車の中にいる人が観測者の場合
加速度運動している

上図のように、一定の加速度$\vec{a}$で直線運動している電車の中で、天井から糸でおもりをつるすと、糸は、鉛直方向から加速度の向きと反対向きに傾いた状態で進む。

これを、地上に静止した観測者が見た場合（図 1－33）と、電車の中にいる（電車とともに加速度運動している）観測者が見た場合（図 1－34）で比較する。

地上に静止した観測者Ａから見ると、おもりには糸の引っ張る力　と重力$m\vec{g}$とが働き、これらの合力$\vec{F}$が、おもりに電車と同じ加速度$\vec{a}$を生じさせていると考えられる。よって、おもりの運動方程式は$m\vec{a}=\vec{F}$となる（図 1－33）。

次に、電車の中にいる観測者Ｂが見ると、おもりは静止している。よって、観測者Ｂは、おもりには糸の引っ張る力$\vec{S}$と重力$m\vec{g}$のほかに、$\vec{S}$と$m\vec{g}$の合力$\vec{F}$とつり合う力が働いていると考える。この力は$\vec{F}$と逆向きで大きさは等しく、$-\vec{F}$つまり$-m\vec{a}$で

ある。つまり、$\vec{a}$という加速度で運動している電車の中で見ていると、電車の中にある物体には、実際に働いている力のほかに、電車の加速度と逆向きの力$-m\vec{a}$が働いているように感じられる（図 1－34)。

　このように、加速度運動をする物体を基準にして見たときのみかけ上の力を慣性力という。

　図 1－33 のように、実際に働いている力だけを考えたときに、運動の法則が成り立つ座標系のことを慣性系という。また、図 1－34 のように、実際に働いている力のほかに、慣性力が働いていると考えることによって、はじめて運動の法則が成り立つ座標系を非慣性系という。

§1.4　回転運動

＜求心力と遠心力＞

①加速度系(非慣性系：回転台上)から見た場合　→ **遠心力**

　等速円運動を行っている振り子は静止していると見ることができる。

　この場合、重力と糸の張力と遠心力がつり合っていると考える。

②静止系(慣性系：回転台の外)から見た場合　→ **求心力**

　振り子が円運動をしている。

この場合、求心力($mr\omega^2$)が働いていると考える。求心力は重力と糸の張力と糸の角度で決まっている。

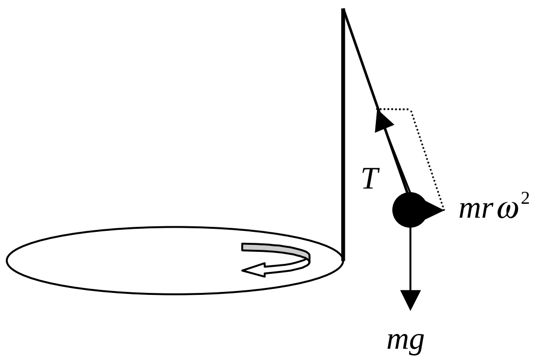


図 1－35

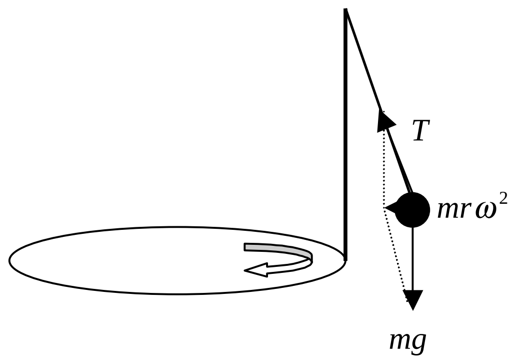


図 1－36

4 －A)　おもりのついた糸を回転させる

　両端におもりとゴム栓のついた糸を上図のように持ち、プラスチックの筒を回してゴム栓部分を回転させる。

$$S = Mg \qquad \text{また} \qquad mr\omega^2 = Mg$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{Mg}{mr}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore T \propto \sqrt{r}$$

回転しているゴム栓の回転半径rが小さくなるとそれに応じて角速度ωが大きくなる。（周期Tが短くなる）

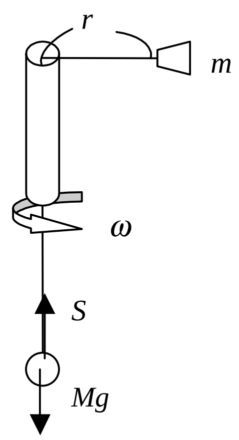
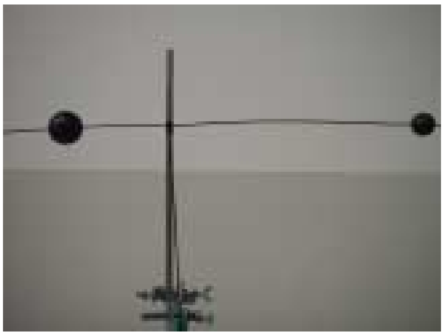


図 1－37

4 ‐B) 回転する２つのおもり

両端に大きさ（重さ）の違うおもりをつけた回転体がある。2 個のおもりをバランスする重心が回転軸にくるように調節して回転させたときは、回転軸がずれずに回転する。バランス重心を回転軸からずらすと、軸の部分がよじれながら回転する。



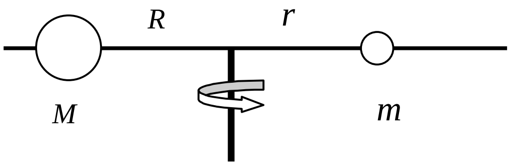


図 1―38

２つの物体の質量を M，m とし、回転中心からの距離を R，r とし、遠心力のつり合いを考えると

$$MR\omega^2 = mr\omega^2$$

$$\therefore MR = mr$$

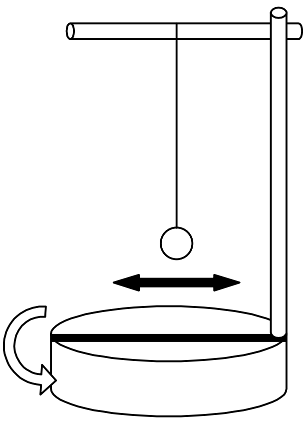
となり、$r = 0$ すなわち回転軸は重心である。

注意）重心の定義 $\sum_i m_i r_i = 0$

4 ‐C) フーコーの振子（回転台：島津製）

振子自体の振動面は変わらないが、回転している地球上にいる観測者にとっては振動面が回転しているように見えるコリオリの力の証明をした実験

⇒ コリオリの力により振子の振動面が回転する



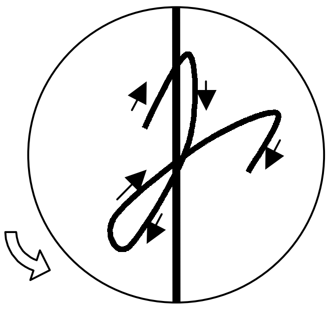


図 1―41　実験装置

図 1―39 慣性系(地球の外の観測者)
から見た振子の振動面
↓
振動面は常に一定

図 1―40 回転系（地球上の観測者）
から見た振子の振動面
↓
軌道を描いて動く

コリオリの力

$\vec{f} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}$　大きさは $2m\omega v\sin\theta$

方向は右図の場合、運動の方向に対して右向き
①止まっているときは力を受けない
②回転中心からの距離に依存しない

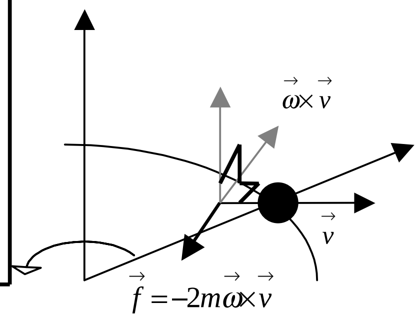


図 1－42

北緯 φ での地表における運動で受ける力の大きさ

$$\boxed{2m\omega v\sin\varphi}$$

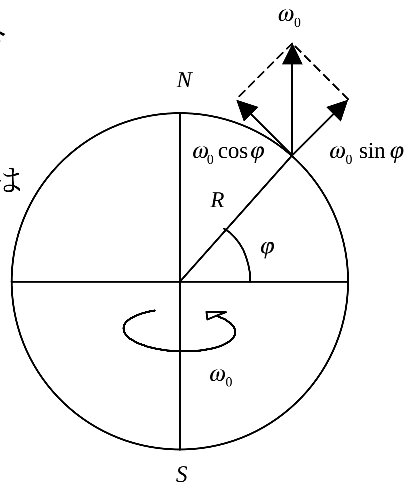
参 考　北緯 34 ° 46 ′ では 1 時間での回転の割合

$$\frac{360}{24}\sin(36°46')\quad 8.6°$$

振動面が 1 回転するのに緯度 φ のところでは

$$\frac{24}{\sin\varphi}\ (h)$$

関西学院大学理学部（上ヶ原）
緯度　　34 ° 45 ′ 50 ″
経度　　135 ° 21 ′ 03 ″



（設問）どの位の時間がかかるか計算せよ。

図 1－43

参考）ガバナーの動き

２本の柔らかい輪のついたもの（右図）を１本の中心軸のまわりで回転させる。このとき遠心力が生じ、輪は回転軸方向を短径にした楕円になる。

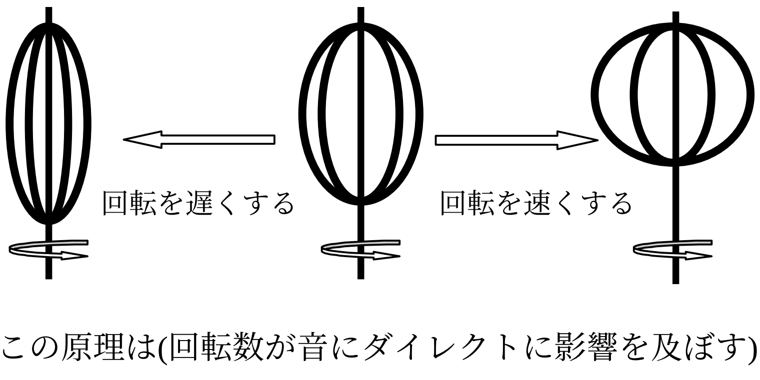


図 1－44　ガバナー

この原理は(回転数が音にダイレクトに影響を及ぼす)レコードの再生に利用されている。

４　-Ｄ）　遠心分離機（島津製）

遠心分離機を回転させると、回転速度に応じて試験管ホルダーが重力と遠心力の合力の向きに傾きながら回転する。

牛乳などを試験管に入れて回すと、遠心加速度によって固形成分が沈殿し、液体成分と分離する。

図 1－45　遠心分離機

力のモーメント（トルク）

ドアを開ける際、ノブを押すと小さな力ですむが、回転軸の近くを押すと、大きな力がいる。このように、剛体を回転させる効果は、力の大きさだけでは決まらず、図 1－46 に示す力の大きさ f と、力の作用点から回転の中心までの距離 r との積で決まる。

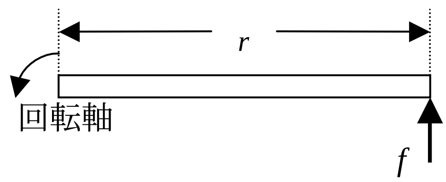


図 1－46

$$N = r \times f$$

この N を力のモーメント（トルク）と呼ばれ、力の能率を表す。　単位）kg・m

慣性モーメント

剛体には大きさがあるので、その回転運動は質点の円運動のように、簡単に取り扱うことができない。図 1－47 のように、質量 M の円盤が回転軸の周りを、一定の角速度 ω で回転しているとき、その運動エネルギー K は、円盤の速度が各点で異なるため、$K = (1/2)Mv^2 = (1/2)M(r\omega)^2$ と表せない。

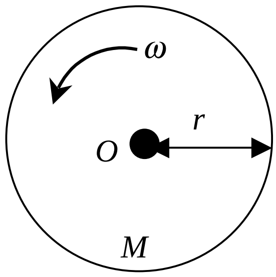


図 1－47

円盤を多数の質点 m_i の集合体と考えると、回転軸から r_i 離れた質点の運動エネルギーは、$(1/2)m_i v_i^2 = (1/2)m_i(r_i\omega)^2$ となるので、円盤全体としての運動エネルギー K [J]は、次式で表される。

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I$$

この $\sum m_i r_i^2$ を慣性モーメントといい、I で表す。（$I = \sum m_i r_i^2$）

慣性モーメントは、剛体の質量と回転軸の位置によって決まる。

4 ‐E) 慣性モーメント実験器

図 1−48　慣性モーメント実験器

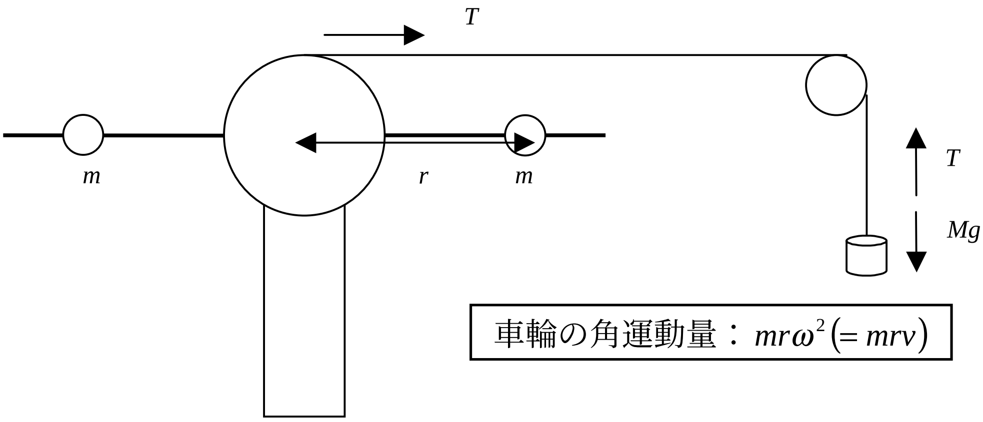


図 1−49

おもりの位置を中心から変化させて回転の加速度（角加速度）を比較する。

$I = mr^2$　（慣性モーメント）

おもりが中心から離れている場合

→　慣性モーメントが大きい

⇒　**運動させる（状態変化させる）のに大きな力（トルク）が必要**

→　系を一定の加重（トルク）で引くとき、角加速度は小さいか？

おもりの位置に関係なく、トルクは一定なので角運動量は保存されるので、おもりの位置が遠いとき、上の角運動量の式よりｒが大きくなる分、ωは小さくなる。

↓つまり

おもりの位置が遠い方が回転の角加速度は小さい。（回り方が遅い）

４　‐Ｆ)　回転台に乗った人が道具を使わずに自力で回転できるか

方法：①回転台上で両腕を水平に前に伸ばす。

②両腕を伸ばしたまま同時に右方向に動かす。

体全体のモーメントははじめ 0 で、手を動かしてもこの状態を保とうとするため体は手の動きと反対の方向に動こうとする。

よって体が回転台上で左方向に動く（回る）。

③両手を静かに下ろし体の中央に戻す。

④①～③を繰り返し行えば永久に回転できる。

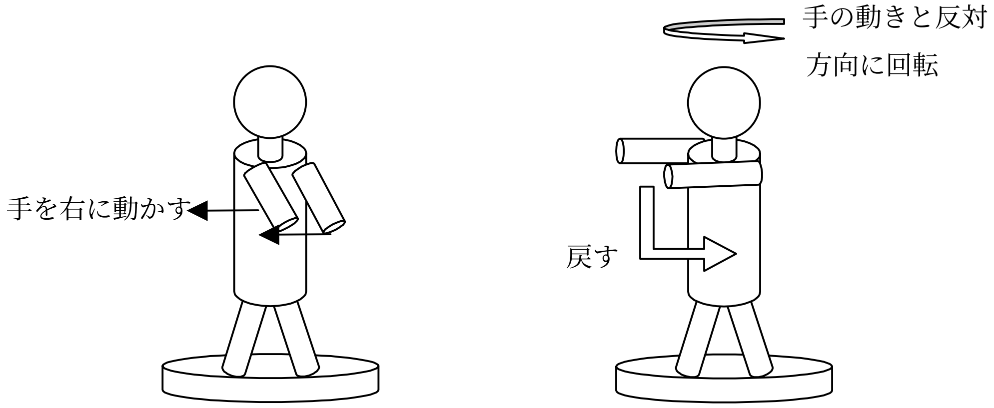


図１－50

§1.5　単振動

軽い糸の上端を固定し、下端におもりをつるす。おもりを少し横に引き寄せてから静かにはなすと、重力の働きにより、おもりは固定点を含む鉛直面内で往復運動を繰り返す。これを単振り子といい、この単振り子の微小振動が調和振動(単振動)である。

単振り子と単振り子の周期の振幅依存性

図 1－51 のような振り子の周期を求める。

おもりの質量をm、振り子（糸）の長さをl、糸が鉛直線となす角をθ、おもりを引いた距離（弧の長さ）をSとすると、

運動方程式は

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

$$=-mg\theta \qquad （\theta \text{ が小さいとき} \sin\theta=\theta）$$

$$=-\frac{mgs}{l}$$

となり、上記の式は単振動に近似できるので、

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{より} \quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{となる。}$$

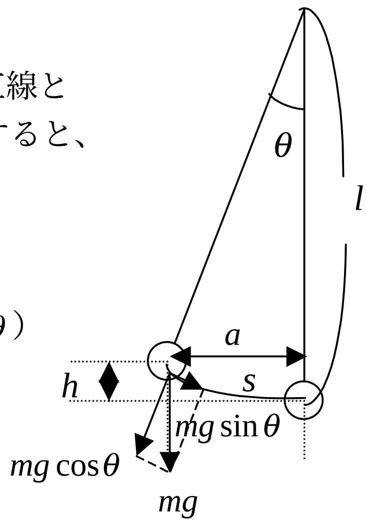


図１－51

つまり、単振り子を小さい角度の範囲で振らせたときの周期は、g と振り子の長さだけで決まり、振幅やおもりの質量には無関係である。このことを振り子の等時性という。

ここで、θ がそれほど小さくない（$\sin\theta=\theta$ の近似が使えない）場合を考えてみる。

sin の Taylor 展開式：　$\sin\theta=\left(\theta\pm\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5\pm\cdots\right)$

となるので、単振動の周期は振幅が大きくなるほど高次項が効いてくる。

→ 周期は長くなる

＜振り子の正確な周期＞

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\frac{\sin^2(\theta/2)}{4}+\frac{9\sin^4(\theta/2)}{64}+\cdots\right\}$$

慣性モーメントと相当単振り子の長さ

図 2 のような実体振子の運動方程式は

$$I_O\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgh\sin\theta \quad \cdots ①$$

となり、このときの周期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}}$$

となる。また、これは

$$l=\frac{I_O}{mh}\left(=\frac{mk_O{}^2}{mh}\right)=\frac{k_O{}^2}{h}$$

k_O ：支軸の周りの回転半径

の単振り子と同じ周期である。

このときの l を**相当単振り子の長さ**と言う。

振幅が小さくて
$\sin\theta=\theta$
とみなされる場合
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega^2\theta$$
①式との比較より
$$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{I_0}}$$

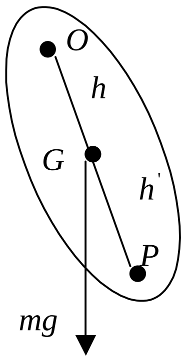


図 1－52

参考）単振り子の周期
$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

支軸 O から l 離れた点 P を振動の中心といい、GP 間の長さを h' とすると、

$l=\frac{k_O{}^2}{h}=\frac{k_G{}^2+h^2}{h}=h+h'$ 　より　$k_G{}^2=h\cdot h'$ ，$T=2\pi\sqrt{\frac{h+h'}{g}}$ 　であることがわかる。また、

$\boxed{O\text{ を軸にしたときの振動の周期と } P \text{ を軸にしたときの振動の周期は同じである。}}$

P を軸にして振らせた場合

平行軸の定理より　$I_P = I_G + mh'^2$　　$\therefore k_P{}^2 = k_G{}^2 + h'^2$

これを P 点に関する相当単振子の式に入れて、

$$l' = \frac{I_P}{mh'} = \frac{k_G + h'^2}{h'} = \frac{h \cdot h' + h'^2}{h'} = h + h' = l$$

相当単振子の長さが同じ＝周期が同じ

→ 相当単振子の長さ：$\frac{2}{3}l$

・実体振子を相当単振子の長さのところで支えてひっくり返しても周期は同じ

5－A） 長さ 1m の一様な棒の支点をいろいろ変えて周期を測る
＜回転軸の位置を変化させたときの棒の振動周期＞

（円柱）棒を用い、回転軸を変化させたときの振動の周期を測定する。

懸垂点と重心の距離を h とすると相当単振子の長さ l は

$$l = \frac{k_G{}^2 + h^2}{h} = \frac{L^2}{3h} + h \qquad \left(\Theta\ k_G{}^2 = \frac{1}{3}L^2\right)$$

となるので、重心から端までの間で周期的に極小値をとる点がある。

$$\frac{dl}{dh} = -\frac{L^2}{3h^2} + 1 = 0$$

$$\therefore \quad h = \frac{L}{\sqrt{3}} \left(= k_G\right)$$

よって、$l = \frac{2L}{\sqrt{3}}$　，$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{\sqrt{3}g}}$ となる。

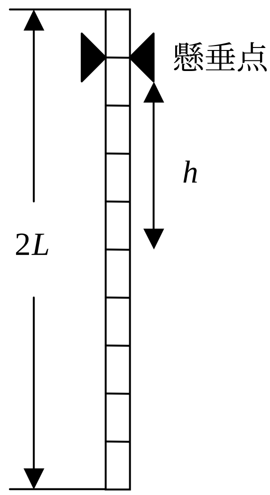


図 1－53

※実験で使用した棒の長さが $2L = 100\,cm$ だとすると $T_{\min} = 1.525 \quad 1.53$ 秒となる。

（ $h = 28.86 \quad 28.9\,cm$ 　のとき）