$\tan^n x\,(n=1,2,3,\ldots)$ の積分について述べます.

これらはそれほどポピュラーな話題ではなく, 大学入試問題あるいは大学用の微分積分の教科書においてはたまに見かける程度です. したがって，余裕のある人だけが趣味で読んでくれれば十分です.

積分で定義された数列 (関数列) について漸化式を導きます. 部分積分を使うという定石に反して，全く別の計算をしなければなりません．あくまでも部分積分が本流であって，$\tan^n x$ は珍しい例ですから，決して本流を見失わないようにして下さい. こういう理由でこの文書は取り扱い注意です. 初心者には勧められません.

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ です．これを積分するために分母が簡単にしたいと考えて $\cos x = t$ とおいて置換積分 A 型を使います. $-\sin x dx = dt$ に合わせて変形します. すなわち，下の式では**下線部を先に作って，それに合わせて他の部分を調節します.**

$$\int \tan x dx = \int \underbrace{\frac{-1}{\cos x}}_{\text{調節}} \underline{\cdot(-\sin x dx)}_{\text{先に作る}} = \int \frac{-1}{t}\underline{dt}$$
$$= -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C$$

次に $n=2$ のときは同じように置換してもあまり易しくなりません. むしろ，$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を使って次のように計算します.

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx$$
$$= \tan x - x + C$$

$n=3$ のときは再び $\cos x = t$ と置換して (つまり n が奇数ならこの置換が有効なのです)

$$\int \tan^3 x dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx = \int \underbrace{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^3 x}}_{\text{後から調節}} \underline{\cdot(-\sin x dx)}_{\text{先に作る}}$$
$$= \int \frac{t^2-1}{t^3}\underline{dt} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)dt = \log|t| + \frac{1}{2t^2} + C$$
$$= \log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

さて一般に $\int \tan^n x dx$ について漸化式を導きましょう．部分積分を使わないところが普通ではありません．あくまで例外だと理解してください．

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

で，これらが一致するというのがミソです:

$$1+\tan^2 x = (\tan x)'$$

両辺に $\tan^n x$ を掛けて

$$\tan^n x + \tan^{n+2} x = \tan^n x(\tan x)'$$

したがって両辺を積分して

$$\int \tan^n x dx + \int \tan^{n+2} x dx = \frac{\tan^{n+1} x}{n+1} + C$$

という訳で漸化式ができました．$\int \tan^n x dx$ は n が偶数のものたちと奇数のものたちという二つの系列に分けられます．