

三角関数の n 倍角の公式とその応用について述べます. なお Voyage 200 の操作の詳細は

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~yamane>

にある「はじめての数式処理電卓 Voyage 200」をご覧ください.

2 倍角の公式

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

はよく知られています. 3 倍角の公式

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

は 2 倍角の公式ほどよく知られてはいませんが, 必要なら自分で導くのは簡単です. 実際, 2 倍角の公式と加法定理から

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) \\ &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

のようにすれば出ます.

同じ要領で加法定理を何度でも繰り返して使えば各 $n \geq 4$ に対して n 倍角の公式が導けるはずですが, 公式をどの形で書くと話がきれいにまとまるのでしょうか. $\cos 2x$ は $2 \cos^2 x - 1$ とも $1 - 2 \sin^2 x$ とも表せるのでした. $\cos x$ を使って表すのと $\sin x$ を使って表すのと, どちらが一般化しやすいのでしょうか.

まずは Voyage 200 で計算してみましよう. `tExpand` というコマンドを使います. `expand` は展開するという意味で, `t` は trigonometric function (三角関数) の `t` です. $\cos x = c$ つまり $x = \cos^{-1} c$ を代入して c の式を求めさせることにしましょう. ここで \cos^{-1} は $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) の逆関数です. `arccos` とも書きます.

$n = 1$ なら c , $n = 2$ なら $2c^2 - 1$ になるわけです. Voyage による計算結果は図 1 のようになります.

F1 ↙	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrgmIO	F6 Clean Up	
---------	---------------	------------	-------------	--------------	----------------	--

■ tExpand(cos(4·x)) | x = cos⁻¹(c)

$$8 \cdot c^4 - 8 \cdot c^2 + 1$$
 ■ tExpand(cos(5·x)) | x = cos⁻¹(c)

$$16 \cdot c^5 - 20 \cdot c^3 + 5 \cdot c$$
 ■ tExpand(cos(6·x)) | x = cos⁻¹(c)

$$32 \cdot c^6 - 48 \cdot c^4 + 18 \cdot c^2 - 1$$

tExpand(cos(6x)) | x=cos⁻¹(c)

図 1 MAIN RAD AUTO FOL 3/30

どうやら $\cos nx$ は $\cos x$ の多項式としてあらわせそうです ($\sin x$ の奇数乗が出てこないわけです).

今度は $\sin nx$ を展開して $\sin x = s$ つまり $x = \sin^{-1} s$ を代入して s の式を求めさせることにしましょう. ここで \sin^{-1} は $y = \sin x$ ($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$) の逆関数です. 『高校生のための逆引き微分積分』では \arcsin と書いていました. 計算結果は図 2 のようになります.

F1 ↙	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrgmIO	F6 Clean Up	
---------	---------------	------------	-------------	--------------	----------------	--

■ tExpand(sin(4·x)) | x = sin⁻¹(s)

$$4 \cdot s \cdot \sqrt{1-s^2} - 8 \cdot s^3 \cdot \sqrt{1-s^2}$$
 ■ tExpand(sin(5·x)) | x = sin⁻¹(s)

$$16 \cdot s^5 - 20 \cdot s^3 + 5 \cdot s$$
 ■ tExpand(sin(6·x)) | x = sin⁻¹(s)

$$32 \cdot s^5 \cdot \sqrt{1-s^2} - 32 \cdot s^3 \cdot \sqrt{1-s^2} + 6 \cdot s \cdot \sqrt{1-s^2}$$

tExpand(sin(6x)) | x=sin⁻¹(s)

図 2 YAMANE RAD AUTO FUNC 4/30

形がバラバラで、話がうまくまとまりそうにありません. $\sqrt{1-s^2} = \cos x$ ですから, $\sin x$ の多項式になる場合と $\sin x$ の多項式 $\times \cos x$ になる場合があるわけです.

そこで方針を変えて, $\sin nx$ を展開するとき $x = \cos^{-1} c$ とおくと図 3 で示されるように全て c の多項式 $\times \sqrt{1-c^2}$ つまり $\cos x$ の多項式 $\times \sin x$ の形になっています. この形で定式化するのがよさそうです.

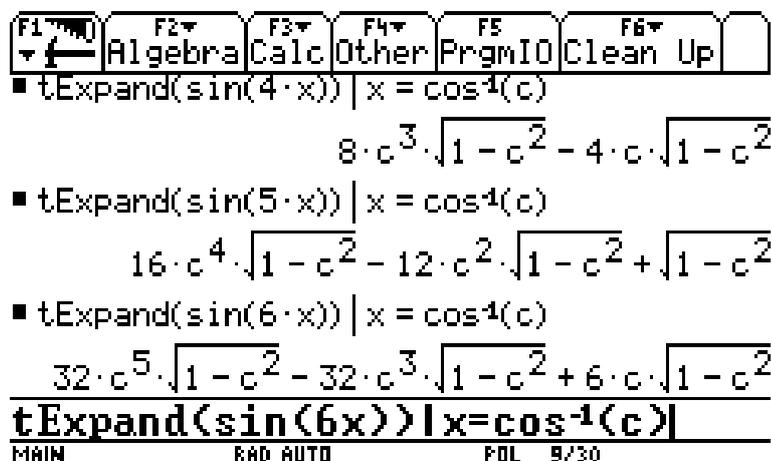


図 3 MAIN RAD AUTO FDL 9/30

そこで次の定理を証明しましょう。

定理 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して次の $(*)_n$ が成り立つ:

$(*)_n$: n 次式 $T_n(x)$ と $n-1$ 次式 $S_n(x)$ がそれぞれただひとつ存在して、全ての実数 θ について $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$, $\sin n\theta = S_n(\cos \theta) \sin \theta$ をみたす。 $T_n(x)$ は x^n の係数が 2^{n-1} で他の係数も全て整数である。 $S_n(x)$ は x^{n-1} の係数が 2^{n-1} で他の係数も全て整数である。

証明 $(*)_1$ は明らかに成り立ちます。 $T_1(x) = x, S_1(x) = 1$ です。

次にもしある n について $(*)_n$ が成り立つとすると、加法定理より

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\theta &= \cos(n\theta + \theta) \\ &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \\ &= T_n(\cos \theta) \cos \theta - S_n(\cos \theta) \sin^2 \theta \\ &= T_n(\cos \theta) \cos \theta + S_n(\cos \theta)(\cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

よって $T_{n+1}(x) = xT_n(x) + (x^2 - 1)S_n(x)$ とすればよく、確かに $T_{n+1}(x)$ は $n+1$ 次で x^{n+1} の係数は 2^n です。他の係数も整数です。

同様に

$$\begin{aligned} \sin(n+1)\theta &= \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta \\ &= S_n(\cos \theta) \sin \theta \cos \theta + T_n(\cos \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

よって $S_{n+1}(x) = xS_n(x) + T_n(x)$ とすればよく、確かに $S_{n+1}(x)$ は n 次で x^n の係数は 2^n です。他の係数も整数です。

したがって、もし $(*)_n$ が成り立つなら $(*)_{n+1}$ も成り立ちます。

以上より $(*)_1$ から $(*)_2$ が出て、 $(*)_2$ から $(*)_3$ が出て... という風に各 n について $(*)_n$ が成り立ちます。 ■

上の $T_n(x)$ のことをチェビシエフの多項式といいます。 $T_n(x)$ という文字の選び方は慣用のものです。 $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ です。

番号をずらして $U_n(x) = S_{n+1}(x)$ とおき, $U_n(x)$ を第 2 種チェビシエフの多項式といいます. $U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 8x^3 - 4x, U_4(x) = 16x^4 - 2x^2 + 1$ です.

チェビシエフ多項式は大学入試問題にときどき現れます. いくつか解説しましょう.

問題 (京都大学) n は自然数とする.

(1) すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos \theta), \quad \sin n\theta = g_n(\cos \theta) \sin \theta$$

をみだし, 係数がともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ.

(2) $f'_n(x) = ng_n(x)$ であることを示せ.

(3) p を 3 以上の素数とすると, $f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ.

解 (1) 上の定理で示されています. $f_n(x) = T_n(x), g_n(x) = S_n(x)$ です. この問題のままの主張を示そうとすると, $xf_n(x) + (x^2 - 1)g_n(x)$ の $n+1$ 次の項が打ち消しあったらどうしようと心配になります. 上の定理のように主張を強くした方が帰納法による証明が易しいのです.

(2) $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ の両辺を θ で微分して $-n \sin n\theta = -f'_n(\cos \theta) \sin \theta$ なので $\sin n\theta = g_n(\cos \theta) \sin \theta$ と比較して $f'_n(x) = ng_n(x)$ となります.

(3) $f_p(x) = 2^{p-1}x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1x + a_0$ とおきます. 各 a_0, \dots, a_{p-1} は整数です.

$$f'_p(x) = p \cdot 2^{p-1}x^{p-1} + (p-1)a_{p-1}x^{p-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$$

ところで (2) より $f'_p(x) = pg_p(x)$ ですから ja_j ($j = 1, 2, \dots, p$) は p の倍数です. 特に $j = 1, 2, \dots, p-1$ については j は素数 p と互いに素なので a_j が p の倍数となります. ■

問題 (大阪大学)

(1) $\cos 3\theta = f(\cos \theta)$, $\cos 4\theta = g(\cos \theta)$ となる 3 次式 $f(x)$ と 4 次式 $g(x)$ を求めよ.

(2) $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ とする. $\cos 3\alpha = \cos 4\alpha$ を示し, 整数を係数にもつ 3 次式 $P(x)$ で $P(\cos \alpha) = 0$ となるものを 1 つ求めよ.

(3) $\cos \frac{2\pi}{7}$ の小数第一位の値を求めよ.

解 (1) $f(x) = 4x^3 - 3x$, $g(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

(2) $7\alpha = 2\pi$ で $3\alpha = 2\pi - 4\alpha$ となり, $\cos 3\alpha = \cos 4\alpha$ です (この方程式は自明な解 $\alpha = 0$ を持ちます. 主役の $\alpha = 2\pi/7$ とは異なるけれども, このことに気づいていると後の計算が楽です). したがって (1) より $f(\cos \alpha) = g(\cos \alpha)$ となります.

$Q(x) = g(x) - f(x)$ とおくと $Q(\cos \alpha) = 0$ です. 上で述べたことから, これは $\alpha = 0$ と置いても満たされるので $Q(x)$ は $x - \cos 0 = x - 1$ で割り切れることがほとんど計算なしに分かります. 割り算を実行すると $Q(x) = (x-1)(8x^3+4x^2-4x-1)$ です. $\cos \alpha \neq 1$ ですから $P(x) = 8x^3+4x^2-4x-1$ とおけばいいことがわかります.

(3) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ で $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$, $\cos \frac{\pi}{3} = 0.5$ なので $0.5 < \cos \alpha < 0.71$ となります. そこで $P(x) = 0$ の解のうちで 0.5 と 0.71 の間にあるものについて調べます.

$P'(x) = 24x^2 + 8x - 4$ であり, $x > 0.5 = 1/2$ のとき $P'(x) > 6 + 4 - 4 > 0$ ですから $y = P(x)$ は単調増加です. また $P(0.6) < 0$, $P(0.7) > 0$ なので $x > 1/2$ において $P(x) = 0$ の解はちょうど 1 つあってそれは 0.6 と 0.7 の間にあります. 1 つだけですからそれが $\cos \alpha$ です. したがって答えは 6 です. ■

$\cos \alpha$ のより詳しい近似値を求めましょう.

問題 $P(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とおくと 0.6 と 0.7 の間にある $P(x) = 0$ のただひとつの解 $\lambda \left(= \cos \frac{2\pi}{7} \right)$ の近似値を求めよ.

解 電卓に頼り切っていいのならば近似値を簡単に求める方法もありますが, あまりブラックボックスになってもよくないので, ここではニュートン法と呼ばれる方法を説明しましょう. $P''(x) = 48x + 8$ なので少なくとも $x > 0$ では $y = P(x)$ は下に凸です.

そこで $a_1 = 0.7$ とおいて λ に収束する数列を作りましょう.

$(a_1, P(a_1))$ における $y = P(x)$ の接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とします. 次に $(a_2, P(a_2))$ における $y = P(x)$ の接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とします.

以下同様に, $(a_n, P(a_n))$ における $y = P(x)$ の接線と x 軸との交点の x 座標を a_{n+1} とすることで数列 $\{a_n\}$ を定義します. 図 4 に示すように $a_1 > a_2 >$

$a_3 > \dots > \lambda$ であり, $a_n \rightarrow \lambda$ となります.

一般に $(a_n, P(a_n))$ における接線は

$$y = 4(6a_n^2 + 2a_n - 1)x - 16a_n^3 - 4a_n^2 - 1$$

なので x 軸との交点の x 座標 a_{n+1} は $a_{n+1} = \frac{16a_n^3 + 4a_n^2 + 1}{4(6a_n^2 + 2a_n - 1)}$ です. 数列 $\{a_n\}$ はこの漸化式をみたし, 初項は $a_1 = 0.7$ です. 一般項がきれいな式で求まるわけではありませんが, 電卓を使って数値計算するのは容易です.

まず

$$\text{newton}(x) = \frac{16x^3 + 4x^2 + 1}{4(6x^2 + 2x - 1)}$$

とおきます (ユーザ定義関数). そして $\text{newton}(0.7)$ を求めます. 後は, 直前の計算結果を表す $\text{ans}(1)$ を使って $\text{newton}(\text{ans}(1))$ を繰り返します. 図 5 で求めた近似値で 0.62348980185 までは正しい数字です (次の 9 は繰り上がりが起きています).

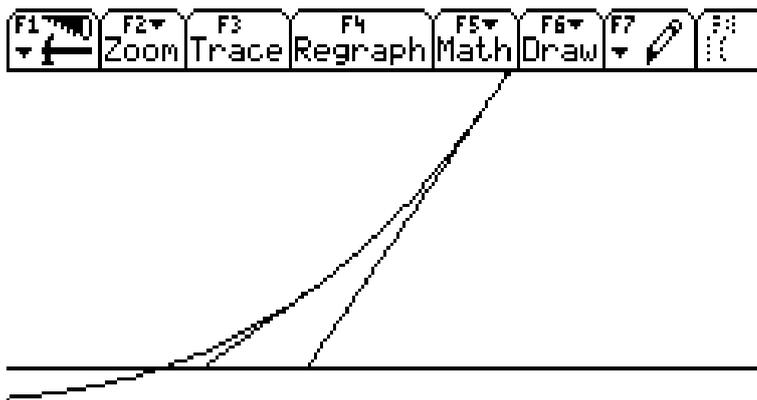


図 4 MAIN RAD AUTO FUNC

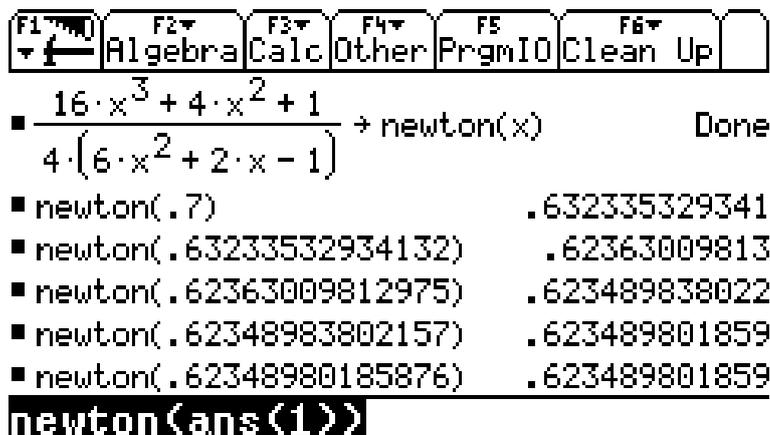


図 5 MAIN RAD AUTO FUNC 6/30

チェビシエフ多項式を用いて $\cos \frac{\pi}{60} = \cos 3^\circ$ を求める方法を説明しましょう。数値が汚いので方針だけ示します。少しだけ違う計算がブルーボックスの『ゆっくり考えよう 高校・総合学習の数学』にあります。

$\beta = \frac{\pi}{5} = 36^\circ$ と置いて、その正弦・余弦を求めましょう。 $3\beta = \pi - 2\beta$ なので $\cos 3\beta = -\cos 2\beta$ です。チェビシエフ多項式を用いて $T_3(\beta) = -T_2(\beta)$ すなわち β は $4x^3 - 3x = -(2x^2 - 1)$ の解です。この方程式は $(x+1)(4x^2 - 2x - 1) = 0$ と書き直せます。 $0 < x < 1$ となる解は一つだけでそれが $\cos \beta$ です。したがって $\cos 36^\circ = \cos \frac{\pi}{5} = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ です。これより $\sin 36^\circ$ も分かります。

$18^\circ = 90^\circ - 2 \times 36^\circ$ より、倍角公式を用いれば $\cos 18^\circ = \sin(2 \times 36^\circ)$, $\sin 18^\circ = \cos(2 \times 36^\circ)$ も分かります。ところで $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ なので $\cos 15^\circ$, $\sin 15^\circ$ も分かります。したがって $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$ とすれば $\cos 3^\circ$, $\sin 3^\circ$ も求めることが出来ます。

大きい n に対して $T_n(x)$ を求めるには漸化式を利用するのが便利です。和積公式から $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta$ ですから

$$T_{n+1}(x) = -T_{n-1}(x) + 2xT_n(x) \quad \dots\dots(\#)$$

が成り立ちます。

この3項間漸化式を2項間漸化式に書き換えた方が計算がしやすくなります。そのためにベクトル記法を使って

$$\begin{bmatrix} T_n(x) \\ T_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{n-1}(x) \\ T_n(x) \end{bmatrix}$$

と書き換えます。右辺の係数の行列を M とおけば

$$\begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T_2(x) \\ T_3(x) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}, \dots$$

のようにして繰り返して M を掛けていけばいいわけです。

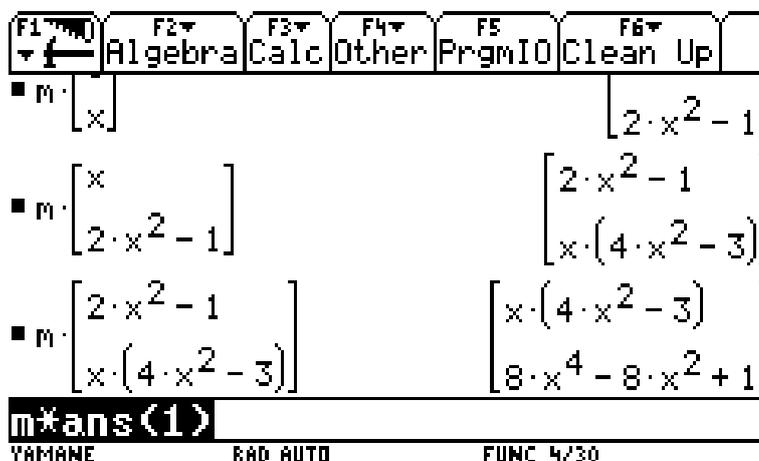


図 6 YAMANE RAD AUTO FUNC 4/30

問題 (名古屋大学) 多項式の列 $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ が, $f_0(x) = 2$, $f_1(x) = x$,

$$f_n(x) = x f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x), n = 2, 3, 4, \dots$$

を満たすとする.

(1) $f_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \dots$ であることを示せ.

(2) $n \geq 2$ のとき, 方程式 $f_n(x) = 0$ の $|x| \leq 2$ における最大の実数解を x_n

とおく. このとき, $\int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ.

解 (1) 与えられた漸化式は (♯) を書き直したものに他ならないのでここまで読んできた人には

$$f_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta \quad \dots\dots (\diamond)_n$$

はほとんど自明ですが, 念のために本問の記号に合わせて証明をやり直しましょう. 普通の帰納法と少し違って, 隣り合う **2枚**のドミノが倒れば次のドミノが倒れるという形のドミノ倒しです.

まず $(\diamond)_0$, $(\diamond)_1$ は明らかに成り立ちます.

$(\diamond)_{n-2}$ と $(\diamond)_{n-1}$ が成り立つとしましょう. 漸化式より

$$\begin{aligned} f_n(2 \cos \theta) &= 2 \cos \theta \cdot f_{n-1}(2 \cos \theta) - f_{n-2}(2 \cos \theta) \\ &\quad \swarrow \text{漸化式} \\ &= 2 \cos \theta \cdot 2 \cos(n-1)\theta - 2 \cos(n-2)\theta \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ &\quad \swarrow \text{帰納法の仮定} \end{aligned}$$

また, 和積公式より (あるいは加法定理より)

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta$$

なので

$$\cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos n\theta \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

となります。②を①に代入すると $(\diamond)_n$ が出ます。

したがって、 $(\diamond)_0, (\diamond)_1$ より $(\diamond)_2$ が出ます。次に $(\diamond)_1, (\diamond)_2$ から $(\diamond)_3$ が出ます。以下同様にして $(\diamond)_n$ が任意の n に対して成り立ちます。

(2) $x = 2\cos\theta$ とおくと(1)より

$$f_n(x) = 0 \iff \cos n\theta = 0 \iff n\theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は任意の整数})$$

$x = 2\cos\theta$ が最大となる θ は 2π の整数倍に最も近いものであり、それらのうちの一つは $\theta = \frac{\pi}{2n}$ です。したがって $x_n = \cos\frac{\pi}{2n}$ です。積分の計算には $x = 2\cos\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2n}$)と置換して $dx = -2\sin\theta d\theta$ より

$$\begin{aligned} \int_{x=x_n}^{x=2} f_n(x) dx &= \int_{\theta=\frac{\pi}{2n}}^{\theta=0} f_n(2\cos\theta) \cdot (-2\sin\theta d\theta) = \int_{\frac{\pi}{2n}}^0 2\cos n\theta \cdot (-2\sin\theta d\theta) \\ &= \int_{\frac{\pi}{2n}}^0 \{2\sin(n-1)\theta - 2\sin(n+1)\theta\} d\theta \\ &= \left[\frac{2}{n-1} \cos(n-1)\theta - \frac{2}{n+1} \cos(n+1)\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2n}} \\ &= \frac{2}{n-1} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) - 1 \right\} - \frac{2}{n+1} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) - 1 \right\} \\ &= \frac{2}{n-1} \left(\sin\frac{\pi}{2n} - 1 \right) - \frac{2}{n+1} \left(-\sin\frac{\pi}{2n} - 1 \right) \\ &= \frac{4}{(n+1)(n-1)} \left(n \sin\frac{\pi}{2n} - 1 \right) \end{aligned}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ より $x = \frac{\pi}{2n}$ とにおいて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\frac{\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n}{\pi} \sin\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = 1$ です。

以上より求める極限值は $4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2(\pi - 2)$ 。

参考文献

- 『フーリエ解析大全』, T. W. ケルナー, 朝倉書店
- 『特殊関数入門』, 一松信, 森北出版
- 『ゆっくり考えよう 高校・総合学習の数学』, 佐々木正敏, ブルーバックス